

2. Opérations sur les inégalités

RÈGLE 1

Si on ajoute, ou retranche, un même réel aux deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de même sens : $x \leq y \Leftrightarrow x + a \leq y + a$

► Exemples :

1) $x \leq 4 \Leftrightarrow x + 2 \leq \dots\dots\dots$

2) $x \leq -5 \Leftrightarrow x - 4 \leq \dots\dots\dots$

3) $x - 3 \leq 7 \Leftrightarrow x \leq \dots\dots\dots$

4) $x + 6 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \dots\dots\dots$

RÈGLE 2

Si on ajoute membre à membre deux inégalités de même sens on obtient une inégalité de même sens : Si $x \leq y$ et $x' \leq y'$ alors $x + x' \leq y + y'$

► Exemples :

1) Si $x \leq -1$ et $x' \leq \frac{1}{2}$ alors $x + x' \leq \dots\dots\dots$

2) Si $\frac{3}{4} \leq x$ et $-2 \leq x'$ alors $\dots\dots\dots \leq x + x'$

► **Attention** : ne jamais soustraire membre à membre deux inégalités (contre-exemple : on a bien $5 \leq 7$ et $4 \leq 9$ mais $(5 - 4)$ n'est pas inférieur à $(7 - 9)$)

RÈGLE 3

Si on multiplie, ou divise, par un même réel **strictement positif** les deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de **même sens** : Pour tout $k > 0$, $x \leq y \Leftrightarrow kx \leq ky$

► Exemples :

1) $x \leq 2 \Leftrightarrow 2x \leq \dots\dots\dots$

2) $x \leq -3 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x \leq \dots\dots\dots$

3) $\frac{7}{2} \leq x \Leftrightarrow \dots\dots\dots \leq 8x$

4) $3x \leq -6 \Leftrightarrow x \leq \dots\dots\dots$

5) $\frac{3}{4}x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq \dots\dots\dots$

6) $\sqrt{3}x \leq -2 \Leftrightarrow x \leq \dots\dots\dots$

RÈGLE 4

Si on multiplie, ou divise, par un même réel **strictement négatif** les deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de **sens contraire** : Pour tout $k < 0$, $x \leq y \Leftrightarrow kx \geq ky$

► Exemples :

1) $x \leq 5 \Leftrightarrow 3x \dots\dots\dots$

2) $x \leq -\frac{8}{3} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x \dots\dots\dots$

3) $x \leq 3\sqrt{2} \Leftrightarrow -x \dots\dots\dots$

4) $-2x \leq 6 \Leftrightarrow x \dots\dots\dots$

5) $-x \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow x \dots\dots\dots$

6) $-\frac{9}{8}x \leq 18 \Leftrightarrow x \dots\dots\dots$

RÈGLE 5

Pour tous réels x et y **strictement positifs** :

$$\text{Si } x \leq y \text{ alors } \begin{cases} x^2 \leq y^2 \text{ (même sens)} \\ \sqrt{x} \leq \sqrt{y} \text{ (même sens)} \\ \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \text{ (sens contraire)} \end{cases}$$

► Exemples :

1) Si $0 < x \leq 2$ alors $x^2 \dots\dots\dots$; $\sqrt{x} \dots\dots\dots$ et $\frac{1}{x} \dots\dots\dots$

2) Si $x \geq \frac{3}{4}$ alors $x^2 \dots\dots\dots$; $\sqrt{x} \dots\dots\dots$ et $\frac{1}{x} \dots\dots\dots$

3. Opérations sur les encadrements

RÈGLE 6

On peut toujours ajouter membre à membre un encadrement :

$$\text{Si } \begin{cases} a \leq x \leq b \\ a' \leq y \leq b' \end{cases} \text{ alors } a + a' \leq x + y \leq b + b'$$

► Exemple : Si $\begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ 5 \leq y \leq 9 \end{cases}$ alors $\leq x + y \leq$

RÈGLE 7

Si tous les nombres sont **positifs**, on peut multiplier membre à membre un encadrement :

Si a et a' sont positifs et si $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ a' \leq y \leq b' \end{cases}$ alors $aa' \leq xy \leq bb'$

► Exemple : Si $\begin{cases} 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ \sqrt{2} \leq y \leq 4 \end{cases}$ alors $\leq xy \leq$

RÈGLE 8

Encadrement de l'opposé : Si $a \leq x \leq b$ alors $-b \leq -x \leq -a$

► Exemple : Si $-6 \leq x \leq 2$ alors $\leq -x \leq$

RÈGLE 9

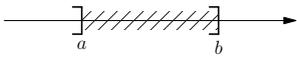
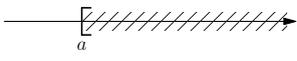
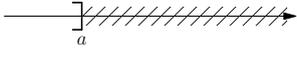
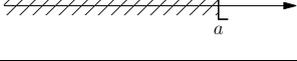
Pour tous réels a , x et b **strictement positifs** :

Si $a \leq x \leq b$ alors $\begin{cases} a^2 \leq x^2 \leq b^2 \text{ (bornes dans le même ordre)} \\ \sqrt{a} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{b} \text{ (bornes dans le même ordre)} \\ \frac{1}{b} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a} \text{ (bornes dans l'ordre contraire)} \end{cases}$

► Exemple : Si $2 \leq x \leq 5$ alors $\begin{cases} \dots \leq x^2 \leq \dots \\ \dots \leq \sqrt{x} \leq \dots \\ \dots \leq \frac{1}{x} \leq \dots \end{cases}$

► **Attention** : ne jamais soustraire ou diviser membre à membre deux encadrements.

4. Intervalles

| Intervalle | Définition | Schéma sur la droite des réels | Borne |
|------------------|-----------------------|--|---------------------------------------|
| $[a ; b]$ | tous les x tels que |  | fermée en a et en b |
| $]a ; b[$ | tous les x tels que |  | ouverte en a et en b |
| $[a ; b[$ | tous les x tels que |  | fermée en a et ouverte en b |
| $]a ; b]$ | tous les x tels que |  | ouverte en a et fermée en b |
| $[a ; +\infty[$ | tous les x tels que |  | fermée en a et ouverte en $+\infty$ |
| $]a ; +\infty[$ | tous les x tels que |  | ouverte en a et en $+\infty$ |
| $] -\infty ; a]$ | tous les x tels que |  | fermée en a et ouverte en $-\infty$ |
| $] -\infty ; a[$ | tous les x tels que |  | ouverte en a et en $-\infty$ |