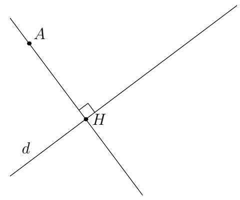
1. Projeté orthogonal

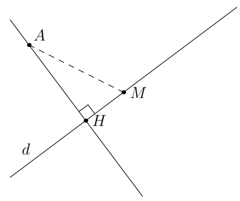
Définition

Le projeté orthogonal d'un point A sur une droite d est



Propriété

Le projeté orthogonal d'un point A sur une droite d est le point de d qui est le plus proche de A (pour tout point M distinct de H sur d, on a $AM > AH$).

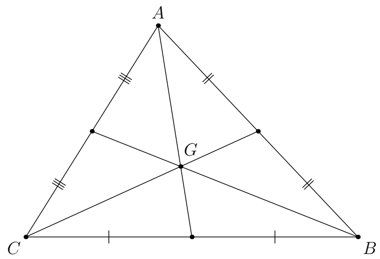


2. Configurations et théorèmes dans les triangles quelconques

a) Droites et points remarquables d'un triangle

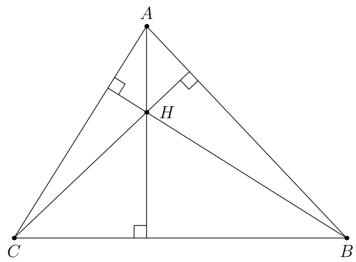
Propriété

Les trois médianes d'un triangle (droites passant par un sommet et le milieu du côté opposé) se coupent en un même point G qui est



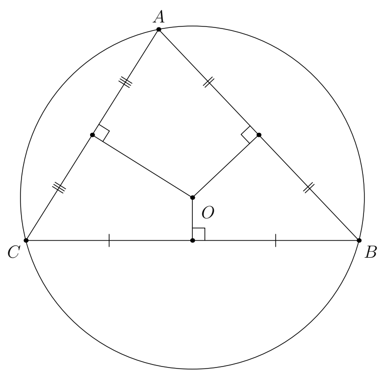
Propriété

Les trois hauteurs d'un triangle (droites passant par un sommet et le projeté orthogonal de ce sommet sur le côté opposé) se coupent en un même point H qui est



Propriété

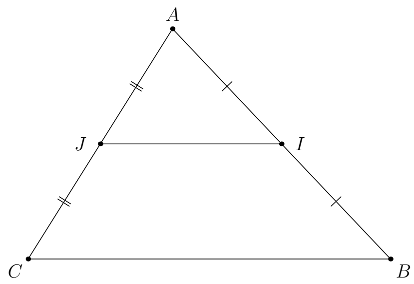
Les trois médiatrices d'un triangle (droites passant par le milieu d'un côté et perpendiculaires à ce côté) se coupent en un même point O qui est



b) Théorème des milieux

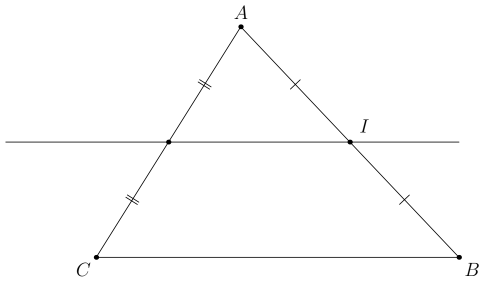
Théorème

Si I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[AC]$ alors



Théorème

Si I est le milieu de $[AB]$ alors la droite parallèle à (BC) passant par I coupe $[AC]$



► *Exemple :* Soit ABC un triangle. On note :

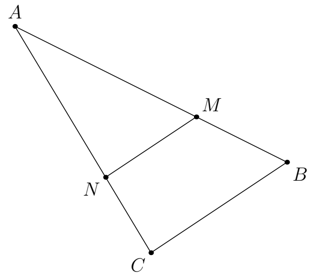
- I le milieu de $[AB]$;
- J le milieu de $[BC]$;
- K le point tel que C soit le milieu de $[JK]$;
- L l'intersection entre les droites (IK) et (AC).

1. Montrer que les droites (LC) et (IJ) sont parallèles.
2. En déduire que L est le milieu de $[IK]$.
3. Montrer que $LC = \dfrac{1}{4}AC$.

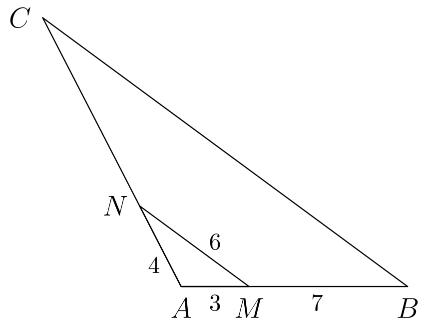
c) Théorème de Thalès

Théorème

Dans un triangle ABC, si M est sur la droite (AB), si N est sur la droite (AC) et si la droite (MN) est parallèle à (BC) alors

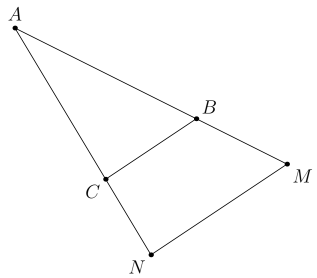


► *Exemple :*
Dans la configuration ci-contre, on a :
$AM = 3$, $MB = 7$, $AN = 4$, $MN = 6$ et $(MN)//(BC)$.
Calculer les distances AC, NC et BC.



Théorème

Dans un triangle ABC, si M est sur la droite (AB), si N est sur la droite (AC), si A, M, B et A, N, C sont dans le même ordre et si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ alors



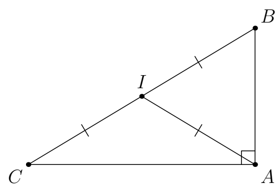
3. Configurations et théorèmes dans les triangles rectangles

a) Caractérisation d'un triangle rectangle

Propriété

Dire qu'un triangle ABC est rectangle en A équivaut à dire que :

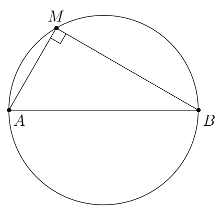
- $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (théorème de Pythagore)
- $AI = \dfrac{BC}{2}$ où I est le milieu de $[BC]$
- le cercle de diamètre $[BC]$ passe par A



b) Théorème de l'angle droit

Théorème

Dire qu'un point M distinct de A et B appartient au cercle de diamètre $[AB]$ équivaut à dire que le triangle AMB est



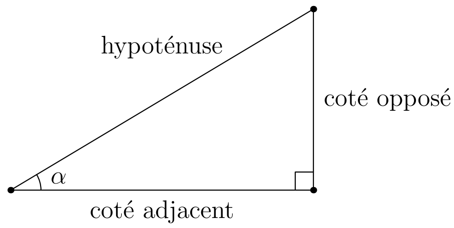
c) Trigonométrie dans un triangle rectangle

Propriété

Dans un triangle rectangle :

$\cos\alpha = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$; $\sin\alpha = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$

$\tan\alpha = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$



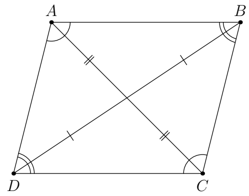
► **Remarque :** On a $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$ (en utilisant le théorème de Pythagore)

4. Parallélogrammes, rectangles, losanges et carrés

Propriété

Dire qu'un quadrilatère non croisé $ABCD$ est un **parallélogramme** équivaut à dire qu'il vérifie une des propriétés suivantes :

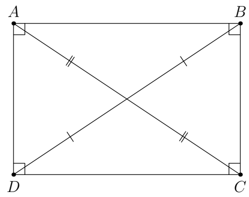
- ses côtés sont parallèles deux à deux
- ses diagonales se coupent en leur milieu
- deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur
- les angles opposés sont égaux deux à deux



Propriété

Dire qu'un quadrilatère $ABCD$ est un **rectangle** équivaut à dire qu'il vérifie une des propriétés suivantes :

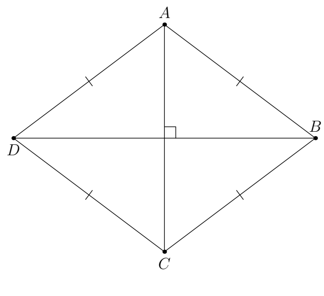
- c'est un parallélogramme avec un angle droit
- c'est un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur



Propriété

Dire qu'un quadrilatère $ABCD$ est un **losange** équivaut à dire qu'il vérifie une des propriétés suivantes :

- ses quatre côtés ont même longueur
- c'est un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont même longueur
- c'est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires



Propriété

Dire qu'un quadrilatère $ABCD$ est un **carré** équivaut à dire qu'il vérifie une des propriétés suivantes :

- il a quatre angles droits et quatre côtés de même longueur
- c'est un rectangle ayant deux côtés consécutifs ont même longueur
- c'est un losange ayant un angle droit