# Systèmes linéaires 2x2 - Seconde



https://www.xm1math.net







## 1. Généralités sur les systèmes linéaires de 2 équations à 2 inconnues

Les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues, dits systèmes 2x2, sont des systèmes de la forme $\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array} \right.$

($x$ et $y$ sont les inconnues, $L_1$ et $L_2$ désignent les deux équations formant le système)
Résoudre ce système, c'est déterminer l'ensemble $S$ des couples $(x, y)$ vérifiant les deux équations simultanément.
Cela revient dans un repère du plan à déterminer les coordonnées des points d'intersection des droites $d : ax + by - c = 0$ et $d' : a'x + b'y - c' = 0$.
D'où trois cas possibles :

- si $d$ et $d'$ sont sécantes, elles se coupent en un point et le système admet donc un unique couple solution ;
- si $d$ et $d'$ sont strictement parallèles, elles n'admettent aucun point d'intersection et le système n'admet donc aucune solution ;
- si $d$ et $d'$ sont confondues, leur intersection comporte une infinité de points et le système admet donc une infinité de solutions.

Pour savoir si le système admet un unique couple solution, il suffit de vérifier que $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ (vecteur directeur de $d$) et $\vec{u}'\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ (vecteur directeur de $d'$) ne sont pas colinéaires, ce qui revient à vérifier que leur déterminant est non nul. Pour le reste du chapitre, on se placera uniquement dans le cas des systèmes n'admettant qu'un seul couple solution.

## 2. Résolution des systèmes 2x2 admettant une unique solution

### Principe

• Pour trouver $x$, on cherche à éliminer $y$. Cela se fait en multipliant les deux équations par des coefficients judicieusement choisis de telle façon qu'en ajoutant ces deux nouvelles équations les termes en $y$ s'éliminent. Ce style d'opération s'appelle une **combinaison linéaire**.
• Pour trouver $y$, on élimine de la même façon $x$ avec une autre combinaison linéaire.

*Un théorème (admis) nous garantit qu'en utilisant ce style de combinaisons linéaires, on obtient un système équivalent.*

### Exemple(s)

▶ **Exemple 1 :** Résolution du système $\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + 4y = 2 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases}$.

• Pour trouver $x$, on cherche à éliminer $y$. Pour cela, on observe bien les termes en $y$ :

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x \boxed{+4y} = 2 \\ 3x \boxed{-2y} = -8 \end{cases}.$$

On se dit alors qu'en multipliant la deuxième équation $L_2$ par 2 et en ajoutant le résultat à la première équation $L_1$, on va bien éliminer les $y$. Le calcul donne :

$$\begin{array}{l} L_1 \ : \ x + 4y = 2 \\ \underline{2L_2 \ : \ 6x - 4y = -16} \\ L_1 + 2L_2 \ : \ 7x = -14 \quad \text{On en déduit que } x = -2. \end{array}.$$







## 2. Résolution des systèmes 2x2 admettant une unique solution

### Exemple(s)

• Pour trouver $y$, on cherche à éliminer $x$. Pour cela, on observe bien les termes en $x$ :

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} \boxed{x} + 4y = 2 \\ \boxed{3x} - 2y = -8 \end{cases}.$$

On se dit alors qu'en multipliant la première équation $L_1$ par 3 et la deuxième équation $L_2$ par $-1$ , on va bien éliminer les $x$ en ajoutant ces deux résultats. Le calcul donne :

$$\begin{array}{l} 3L_1 \ : \ 3x + 12y = 6 \\ \underline{-L_2 \ : \ -3x + 2y = 8} \\ 3L_1 - L_2 \ : \ 14y = 14 \quad \text{On en déduit que } y = 1 \end{array}.$$

• Remarque : il est inutile de détailler autant les calculs sur une copie. Il est préférable de rédiger de la façon suivante :

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + 4y = 2 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 + 2L_2 \\ 3L_1 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} 7x = -14 \\ 14y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

$S = \{(-2;1)\}$ (ensemble composé du couple formé par le $x$ et le $y$ trouvés)

## 2. Résolution des systèmes 2x2 admettant une unique solution

Exemple(s)

▶ **Exemple 2 :** Résolution du système $\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x+5y=21 \\ 6x+2y=-2 \end{array} \right.$ .

• Pour trouver $x$, on cherche à éliminer $y$. L'observation des termes en $y$ amène à voir que la combinaison $2L_1 - 5L_2$ éliminera bien $y$. Le calcul donne :

$$\begin{array}{l} 2L_1 \;:\; 4x+10y=42 \\ \underline{-5L_2 \;:\; -30x-10y=10} \\ 2L_1-5L_2 \;:\; -26x=52 \quad \text{On en déduit que } x=-2 \end{array} .$$

• Pour trouver $y$, on cherche à éliminer $x$. L'observation des termes en $x$ amène à voir que la combinaison $3L_1 - L_2$ éliminera bien $x$. Le calcul donne :

$$\begin{array}{l} 3L_1 \;:\; 6x+15y=63 \\ \underline{-L_2 \;:\; -6x-2y=2} \\ 3L_1-L_2 \;:\; 13y=65 \quad \text{On en déduit que } y=5 \end{array} .$$

• Rédaction sur une copie :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x+5y=21 \\ 6x+2y=-2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} 2L_1-5L_2 \\ 3L_1-L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} -26x=52 \\ 13y=65 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-2 \\ y=5 \end{array} \right. .$$

$S=\{(-2;5)\}$





# Fin du chapitre