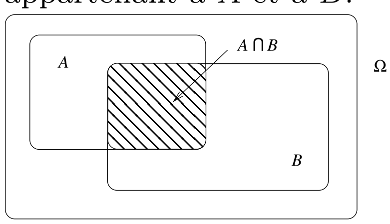
Probabilités - Seconde

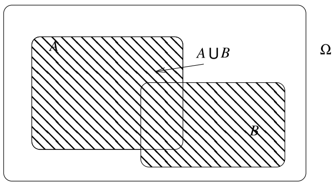
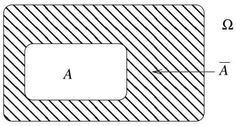
https://www.xm1math.net

1. Langage des événements

Pour illustrer le vocabulaire, on utilise l'exemple suivant « tirage au hasard d'une carte dans un jeu de 32 cartes ».

Vocabulaire	Avec l'exemple
On appelle **univers**, l'ensemble noté Ω de tous les résultats possibles.	$\Omega =$ ensemble formé des 32 cartes
On appelle **événement**, toute partie de l'univers.	$A =$ « obtenir l'as de pique » =ensemble formé de l'as de pique $B =$ « obtenir un as » =ensemble formé des 4 as
On appelle **événement élémentaire**, tout événement ne comportant qu'un seul élément.	« obtenir l'as de pique » est un événement élémentaire, mais pas « obtenir un as ».
L'événement $A \cap B$ (« A ET B ») est l'événement formé de tous les résultats possibles appartenant à A et à B.  	Si $A =$ « obtenir un as » et $B =$ « obtenir un carreau » : $A \cap B =$ « A ET B »= « obtenir un as et un carreau »

1. Langage des événements

Vocabulaire	Avec l'exemple
L'événement $A \cup B$ (« A OU B ») est l'événement formé de tous les résultats possibles appartenant à A ou à B. 	Si A = « obtenir un as » et B = « obtenir un carreau » : $A \cup B$ = « A OU B »= « obtenir un as ou un carreau »
Deux événements sont dits **incompatibles** (ou disjoints) si leur intersection est vide.	« obtenir une figure » et « obtenir un 7 » sont incompatibles, mais « obtenir une figure » et « obtenir un cœur » sont compatibles.
On appelle **événement contraire** d'un événement A, l'événement noté $\overline{A}$ formé de tous les résultats possibles n'appartenant pas à A. 	Si A = « obtenir une carte rouge » : $\overline{A}$ = « obtenir une carte noire ».
• L'événement correspondant à l'ensemble vide est dit **événement impossible**. • L'événement correspondant à l'univers est dit **événement certain**.	« obtenir un 2 » est un événement impossible. « obtenir une carte rouge ou noire » est un événement certain.

2. Probabilités sur un univers fini

a) Loi de probabilité

Définition

Définir une **loi de probabilité** pour une expérience aléatoire dont l'univers Ω est fini, c'est associer à chaque événement élémentaire un nombre compris entre 0 et 1, appelé probabilité de l'événement élémentaire correspondant, de telle façon que :

- la somme des probabilités de tous les événements élémentaires soit égale à 1 ;
- la probabilité d'un événement A, noté $p(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

b) Modélisation d'une expérience aléatoire

Modélisation d'une expérience aléatoire

- Modéliser une expérience aléatoire, c'est lui associer une loi de probabilité donnant les probabilités des événements élémentaires.
- Le choix d'une modélisation doit suivre la « loi des grands nombres » qui dit que si on répète un grand nombre de fois de façon identique et indépendante une expérience aléatoire, la fréquence d'observation d'un événement doit « tendre » vers la probabilité de cet événement établi par le modèle choisi.

2. Probabilités sur un univers fini

c) Exemples de choix d'une modélisation

Exemples de choix d'une modélisation

- **Exemple 1 :** lancer d'une pièce équilibrée.

  On choisit la loi de probabilité :

Événement élémentaire	pile	face
probabilité	$0,5$	$0,5$

- **Exemple 2 :** lancer d'une punaise. On peut difficilement utiliser un modèle théorique : on se base alors sur des expériences consistant à lancer un grand nombre de fois une punaise et on prend comme probabilité, la fréquence observée lors de ces expériences. Si on constate que la punaise tombe sur la tête dans 32% des cas, on peut prendre comme loi de probabilité :

Événement élémentaire	tête	pointe
probabilité	$0,32$	$0,68$

- **Exemple 3 :** lancer d'un dé truqué de façon à ce que la face « 6 » ait 3 fois plus de chance de sortir que les autres faces. Le modèle doit donc respecter les conditions suivantes :

$$\begin{cases} p(«1») = p(«2») = p(«3») = p(«4») = p(«5») \\ p(«6») = 3p(«1») \\ p(«1») + p(«2») + p(«3») + p(«4») + p(«5») + p(«6») = 1 \end{cases}$$

  On déduit de la dernière ligne qu'il faut $5p(«1») + 3p(«1») = 1$. La loi de probabilité correspondante est alors :

Événement élémentaire	«1»	«2»	«3»	«4»	«5»	«6»
probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

3. Propriétés des probabilités

Propriété(s)

Pour toute expérience aléatoire telle que l'univers Ω soit fini et quelque soit la loi de probabilité choisie :

- $p(\emptyset) = 0$ *(événement impossible)*
- $p(\Omega) = 1$ *(événement certain)*
- *Pour tout événement A, $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$*
- *Si un événement A est inclus dans un événement B, $p(A) \leqslant p(B)$*
- *Pour tout événement A, $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$ (probabilité de l'événement contraire)*
- *Si deux événements A et B sont incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$*
- *Si A et B ne sont pas incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$*

Cas particulier de la loi équirépartie

- Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité (lancer d'un dé non truqué, tirage d'une carte...), on dit que l'on est dans une situation d'équiprobabilité et la loi de probabilité est dite alors loi équirépartie.
- Dans une situation d'équiprobabilité sur un univers fini, pour tout événement A on a :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de }\Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

3. Propriétés des probabilités

Exemple(s)

On tire au hasard une carte de façon équiprobable dans un jeu de 32 cartes et on note :

- A l'événement « la carte tirée est un as »
- B l'événement « la carte tirée est un carreau »
- C l'événement « la carte tirée est une figure (valet, dame, roi) »

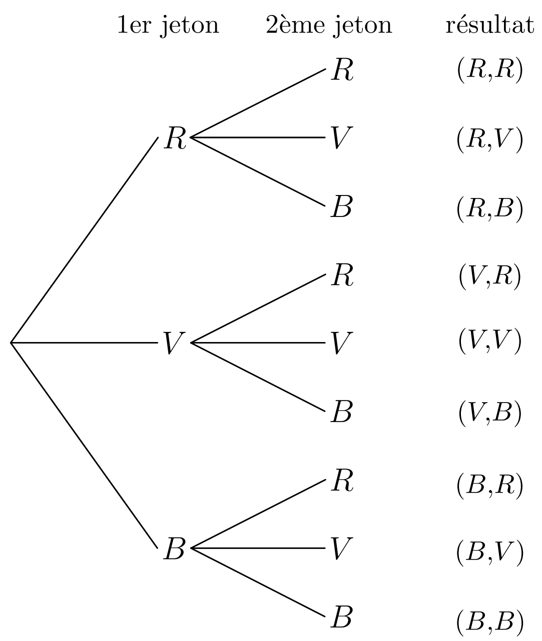
On a alors :

- $p(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ (4 as) ; $p(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ (8 carreaux) ; $p(C) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ (12 figures)
- $p(A \cap B) = \frac{1}{32}$ (as et carreau)
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$ (as ou carreau : il ne faut pas compter l'as de carreau deux fois)
- $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A) = \frac{7}{8}$ (ne pas obtenir un as)
- $p(A \cup C) = p(A) + p(C) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$ (as ou figure : événements incompatibles)

4. Exemples de référence : tirages successifs

• **Exemple 1 :** tirage successif avec remise en s'aidant d'un arbre

Une boite contient 3 jetons : un rouge noté R, un vert noté V et un jeton bleu noté B.



On tire au hasard un premier jeton que l'on remet dans la boite avant de tirer un deuxième jeton.

Le nombre de résultats possibles est égal à 9 et on a :

- p (« les deux jetons tirés sont rouges ») $= \frac{1}{9}$ (un cas favorable)
- p (« au moins un des deux jetons tirés est rouge ») $= \frac{5}{9}$ (5 cas favorables)

4. Exemples de référence : tirages successifs

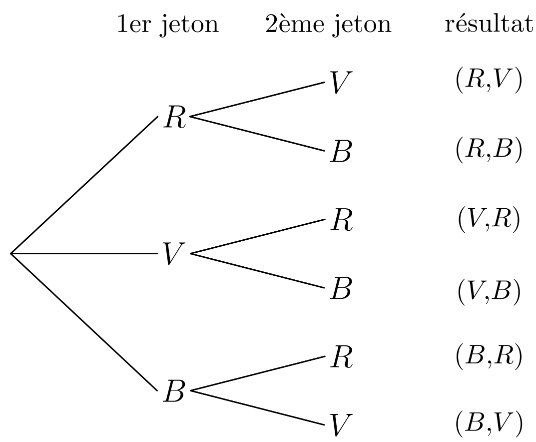
- **Exemple 2 :** tirage successif sans remise en s'aidant d'un arbre

Une boite contient 3 jetons : un rouge noté R, un vert noté V et un jeton bleu noté B.

On tire au hasard un premier jeton puis un deuxième sans remettre le premier dans la boite.

Le nombre de résultats possibles est égal à 6 et on a :

- p (« les deux jetons tirés sont rouges ») $= 0$
  (aucun cas favorable)
- p (« au moins un des deux jetons tirés est rouge ») $= \dfrac{4}{6}$
  (4 cas favorables)



4. Exemples de référence : tirages successifs

- **Exemple 3 :** tirage successif avec remise sans arbre

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes, que l'on remet dans le paquet avant de tirer une deuxième carte. On raisonne : *choix pour la 1re carte ; choix pour la 2e carte*

- Nombre de résultats possibles $= \overbrace{32}^{1^{\text{re}}\text{ carte}} \times \overbrace{32}^{2^{\text{e}}\text{ carte}} = 1024$

- p (« on obtient 2 as ») $= \dfrac{\overbrace{4}^{1^{\text{re}}\text{ carte : as}} \times \overbrace{4}^{2^{\text{e}}\text{ carte : as}}}{1024} = \dfrac{1}{64}$

- p (« on obtient un as et un seul ») $=$
$$\frac{\overbrace{4}^{1^{\text{re}}\text{ carte : as}} \times \overbrace{28}^{2^{\text{e}}\text{ carte : pas as}} + \overbrace{28}^{1^{\text{re}}\text{ carte : pas as}} \times \overbrace{4}^{2^{\text{e}}\text{ carte : as}}}{1024} = \frac{224}{1024} = \frac{7}{32}$$

4. Exemples de référence : tirages successifs

• **Exemple 4 :** tirage successif sans remise sans arbre

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes, puis une deuxième sans remettre la première dans le paquet. On raisonne : *choix pour la 1re carte ; choix pour la 2e carte*

- Nombre de résultats possibles $= \overbrace{32}^{1^{\text{re}}\text{ carte}} \times \overbrace{31}^{2^{\text{e}}\text{ carte}} = 992$
- $p\,(\text{« on obtient 2 as »}) = \dfrac{\overbrace{4}^{1^{\text{re}}\text{ carte : as}} \times \overbrace{3}^{2^{\text{e}}\text{ carte : as}}}{992} = \dfrac{3}{248}$
- $p\,(\text{« on obtient un as et un seul »}) =$

$$\frac{\overbrace{4}^{1^{\text{re}}\text{ carte : as}} \times \overbrace{28}^{2^{\text{e}}\text{ carte : pas as}} + \overbrace{28}^{1^{\text{re}}\text{ carte : pas as}} \times \overbrace{4}^{2^{\text{e}}\text{ carte : as}}}{992} = \frac{224}{992} = \frac{7}{31}$$

Fin du chapitre