Pourcentages - Seconde

©Pascal Brachet (CC BY NC SA)

https://www.xm1math.net

1. Pourcentage d'une grandeur

La proportion, exprimée en pourcentage, d'une grandeur A par rapport à une grandeur B se retrouve en effectuant le calcul $\frac{A}{B} \times 100$.

Exemple(s)

- Quel pourcentage représentent 18 élèves par rapport à un total de 120 élèves ?
  Réponse : 15% car $\frac{18}{120} \times 100 = 15$.
- Quel pourcentage représentent 2,10 euros par rapport à une somme totale de 700 euros ?
  Réponse : $0,3\%$ car $\frac{2,1}{700} \times 100 = 0,3$.

Prendre $x\%$ d'une grandeur revient à la multiplier par $\frac{x}{100}$.

Exemple(s)

- Quelle somme représente 5% de 640 euros ?
  Réponse : 32 euros car $\frac{5}{100} \times 640 = 32$

1. Pourcentage d'une grandeur

Exemple(s)

- Quelle somme représente $0,45\%$ de $15\,000$ euros ?

  Réponse : $67,5$ euros car $\dfrac{0,45}{100} \times 15\,000 = 67,5$.

- 384 élèves d'un lycée font de l'espagnol ce qui représente 32% du nombre total d'élèves dans le lycée. Combien y a-t-il d'élèves dans le lycée ?

  Réponse : Cela revient à chercher x tel que $\dfrac{32}{100} \times x = 384$. On en déduit que $x = \dfrac{384}{\frac{32}{100}} = \dfrac{384 \times 100}{32} = 1200$. Le lycée comporte $1\,200$ élèves.

Prendre $x\%$ de $y\%$ d'une grandeur revient à prendre directement $\dfrac{x \times y}{100}\%$ de cette grandeur.

Cela vient du fait que $\dfrac{x}{100} \times \dfrac{y}{100} \times 100 = \dfrac{x \times y}{100}$

Exemple(s)

- Quel pourcentage global des revenus est ponctionné si on prélève une taxe de 20% sur 80% des revenus ?

  Réponse : 16% car $\dfrac{20 \times 80}{100} = 16$.

2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

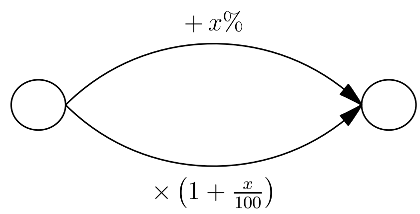
a) Principe général

- Si on augmente une grandeur A de $x\%$, on obtient $A + \frac{x}{100}A = \left(1 + \frac{x}{100}\right)A$.
- Si on diminue une grandeur A de $x\%$, on obtient $A - \frac{x}{100}A = \left(1 - \frac{x}{100}\right)A$.

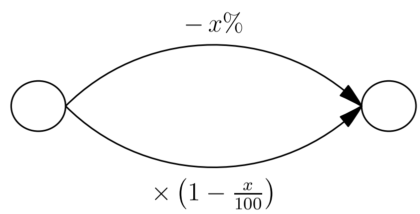
Propriété(s)

Représentation schématique :

- *Augmenter une grandeur de $x\%$ revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{x}{100}\right)$.*
  *$\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ est alors appelé **coefficient multiplicateur** associé à la hausse.*



- *Diminuer une grandeur de $x\%$ revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{x}{100}\right)$.*
  *$\left(1 - \frac{x}{100}\right)$ est alors appelé **coefficient multiplicateur** associé à la baisse.*



2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

Exemple(s)

1.
   - Augmenter une grandeur de 3% revient à la multiplier par $(1+\frac{3}{100}) = 1,03$
   - Augmenter une grandeur de 12,5% revient à la multiplier par $\left(1+\frac{12,5}{100}\right) = 1,125$
   - Augmenter une grandeur de 100% revient à la multiplier par $(1+\frac{100}{100}) = 2$
2.
   - Diminuer une grandeur de 15% revient à la multiplier par $(1-\frac{15}{100}) = 0,85$
   - Diminuer une grandeur de 7,5% revient à la multiplier par $\left(1-\frac{7,5}{100}\right) = 0,925$
   - Diminuer une grandeur de 50% revient à la multiplier par $(1-\frac{50}{100}) = 0,5$
3. Si le prix d'un produit valant 500 euros subit une hausse de 4%, son nouveau prix est de $500 \times 1,04 = 520$ euros.

$$\begin{tikzcd} 500 \arrow[r, bend left, "+4\%"] \arrow[r, bend right, "\times(1+\frac{4}{100})"'] & 520 \end{tikzcd}$$

2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

Exemple(s)

4. Si une action valant 15 euros subit une baisse de 6%, sa nouvelle valeur est de $15 \times 0,94 = 14,1$ euros.

$$\begin{tikzcd} 15 \arrow[r, bend left, "-6\%"] \arrow[r, bend right, "\times(1-\frac{6}{100})"'] & 14{,}1 \end{tikzcd}$$

5. Le prix d'un produit est de 159,6 euros après avoir subi une hausse de 14%. Le prix du produit avant la hausse était x tel que $x \times 1,14 = 159,6$. On obtient $x = \frac{159,6}{1,14} = 140$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "+14\%"] \arrow[r, bend right, "\times(1+\frac{14}{100})"'] & 159{,}6 \end{tikzcd}$$

2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

b) Retrouver un pourcentage d'évolution à partir du coefficient multiplicateur

Multiplier une grandeur par un coefficient t revient à lui appliquer une évolution en pourcentage (positive ou négative) de $(t-1)\times 100$.

Exemple(s)

1. Multiplier une grandeur par $1,15$ revient à lui appliquer une hausse de 15% car $(1,15-1)\times 100 = 15$.
2. Multiplier une grandeur par $1,04$ revient à lui appliquer une hausse de 4% car $(1,04-1)\times 100 = 4$.
3. Multiplier une grandeur par $0,9$ revient à lui appliquer une baisse de 10% car $(0,9-1)\times 100 = -10$.
4. Multiplier une grandeur par $0,72$ revient à lui appliquer une baisse de 28% car $(0,72-1)\times 100 = -28$.

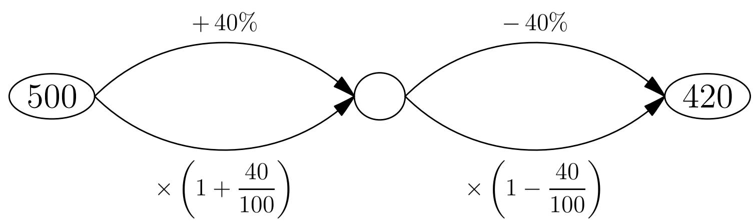
c) Application aux variations successives

Principe : Lors d'augmentations et/ou de baisses successives, les coefficients multiplicateurs se multiplient mais les pourcentages ne s'ajoutent pas.

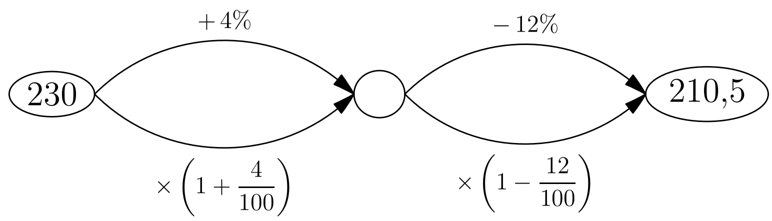
2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

Exemple(s)

1. Si le prix d'un produit valant 500 euros subit une hausse de 40% suivie d'une baisse de 40%, son nouveau prix est de 420 euros car $500\times 1,4\times 0,6 = 420$.



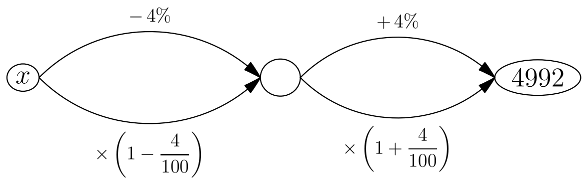
2. Si le prix d'un produit valant 230 euros subit une hausse de 4% suivie d'une baisse de 12%, son nouveau prix est de 210,5 euros car $230\times 1,04\times 0,88 \approx 210,5$.



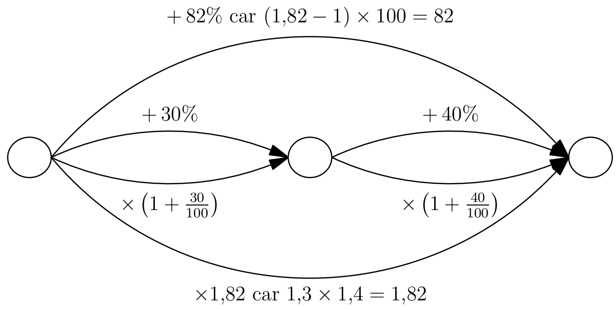
2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

Exemple(s)

3. Le prix d'un produit est de 4992 euros après avoir subi une baisse de 4%, suivie d'une hausse de 4%. Le prix initial du produit était x tel que $x \times 0,96 \times 1,04 = 4992$. On obtient $x = \frac{4992}{0,96 \times 1,04} = 5000$.



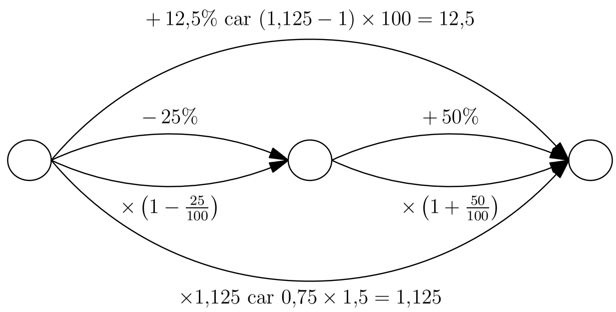
4. Faire subir à une grandeur une hausse de 30% suivie d'une autre hausse de 40% revient à lui appliquer directement une hausse en pourcentage de 82% car le coefficient multiplicateur global est de $1,3 \times 1,4 = 1,82$ et que $(1,82 - 1) \times 100 = 82$.



2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

Exemple(s)

5. Faire subir à une grandeur une baisse de 25% suivie d'une hausse de 50% revient à lui appliquer directement une hausse en pourcentage de 12,5% car le coefficient multiplicateur global est de $0,75 \times 1,5 = 1,125$ et que $(1,125 - 1) \times 100 = 12,5$.

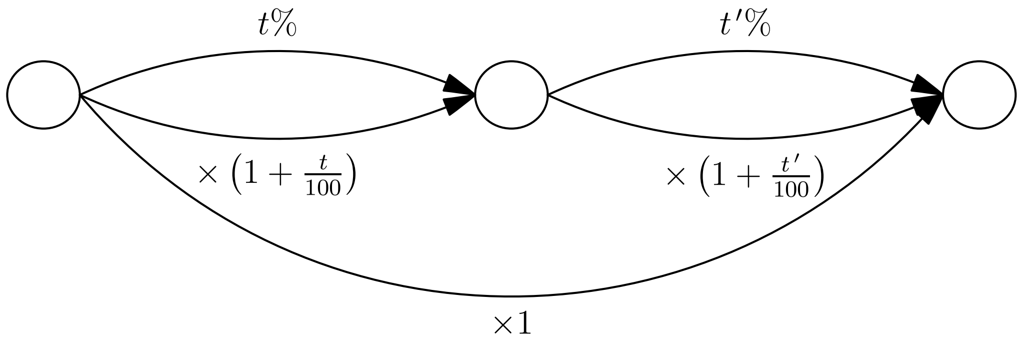


6. Un capital augmentant de 3,5% par an pendant 10 ans a subi une hausse globale en pourcentage sur ces 10 ans d'environ 41% car le coefficient multiplicateur global est de $\underbrace{1,035 \times 1,035 \times \cdots \times 1,035}_{\text{10 fois}} = 1,035^{10} \approx 1,41$ et que $(1,41 - 1) \times 100 = 41$.

2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

d) Taux d'évolution réciproque

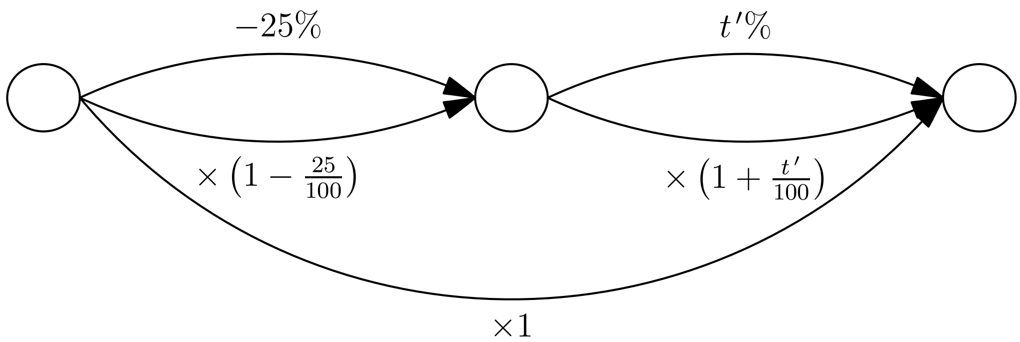
Si une grandeur subit une évolution de $t\%$, on appelle taux d'évolution réciproque de cette évolution, le taux t' tel que $\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1+\frac{t'}{100}\right)=1$, c'est à dire le taux d'évolution qui permet « d'annuler » l'évolution de $t\%$ en rendant le coefficient multiplicateur global égal à 1.



2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

Exemple(s)

Déterminer le taux d'évolution réciproque d'une baisse de 25% revient à déterminer t' tel que $\left(1-\frac{25}{100}\right)\times\left(1+\frac{t'}{100}\right)=1$:



Détermination de t' : $\left(1-\frac{25}{100}\right)\times\left(1+\frac{t'}{100}\right)=1 \Leftrightarrow 0,75\times\left(1+\frac{t'}{100}\right)=1 \Leftrightarrow 1+\frac{t'}{100}=\frac{1}{0{,}75}$
$\Leftrightarrow 1+\frac{t'}{100}\approx 1,333 \Leftrightarrow \frac{t'}{100}\approx 0,333 \Leftrightarrow t'\approx 33,3$.
Autrement dit, il faut une hausse de $33,3\%$ pour « annuler » une baisse de 25%.

3. Variations d'une grandeur

Définition

Étant donné une grandeur passant de la valeur initiale A à la valeur finale B, on dit que :

- cette grandeur a subi une **variation absolue** égale à $B - A$;
- cette grandeur a subi une **variation relative** égale à $\dfrac{B-A}{A}$;

Propriété(s)

L'évolution en pourcentage *qu'a subi cette grandeur se retrouve en effectuant le calcul :*
$$\frac{B-A}{A} \times 100 = \frac{\textit{valeur finale} - \textit{valeur initiale}}{\textit{valeur initiale}} \times 100.$$

En effet :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "+x\%"] \arrow[r, bend right, "\times\left(1+\frac{x}{100}\right)"'] & B \end{tikzcd}$$

$$A \times \left(1 + \frac{x}{100}\right) = B \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{100} = \frac{B}{A} \Leftrightarrow \frac{x}{100} = \frac{B}{A} - 1 \Leftrightarrow \frac{x}{100} = \frac{B-A}{A} \Leftrightarrow x = \frac{B-A}{A} \times 100$$

3. Variations d'une grandeur

Exemple(s)

1. Lorsque le prix d'un produit passe de 64 à 72 euros :
   - la variation absolue du prix est égale à $72 - 64 = 8$ euros ;
   - la variation relative du prix est égale à $\dfrac{72-64}{64} = 0,125$;
   - l'évolution en pourcentage du prix est de $+12,5\%$ car $\dfrac{72-64}{64} \times 100 = 12,5$.
2. La valeur d'une action passant de $13,4$ à $11,7$ euros a subi une baisse en pourcentage d'environ $12,7\%$ car $\dfrac{11,7-13,4}{13,4} \times 100 \approx -12,7$.

Fin du chapitre

xm1math.net