Complément de géométrie analytique

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

▶ Exercice n°1

Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans les cas suivants :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2+\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$
3. $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} a-2 \\ 3a \end{pmatrix} \qquad (a \in \mathbb{R})$

▶ Exercice n°2

Déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ou non dans les cas suivants :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{3}+2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{3}-2 \end{pmatrix}$

▶ Exercice n°3

Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur que m doit prendre pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2-m \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -1+m \end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ m-8 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} m-3 \\ 1 \end{pmatrix}$

▶ Exercice n°4

On considère les points $A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Montrer que le triangle ABC est rectangle en A et calculer son aire.

▶ Exercice n°5

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

1. Calculer $\vec{u}^2$ et $\vec{v}^2$.
2. En déduire $(2\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}-\vec{v})$, $(\vec{u}+2\vec{v})^2$, $(-3\vec{u}+\vec{v})^2$.

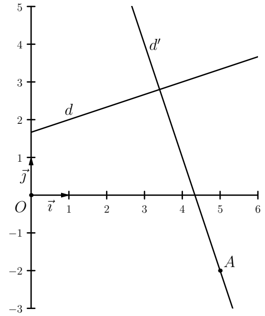
▶ Exercice n°6

1. Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d d'équation $\sqrt{3}x + 3y + 5 = 0$.
2. Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}'$ de la droite d' d'équation $-2\sqrt{3}x + 2y + 4 = 0$.
3. Déterminer si les droites d et d' sont perpendiculaires on non.
4. Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ de la droite d et un vecteur normal $\vec{n}'$ de la droite d'.

▶ Exercice n°7

On considère le point $A\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et d la droite d'équation $x - 3y + 5 = 0$.

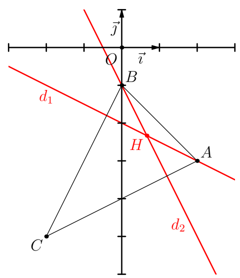
Déterminer une équation de la droite d' perpendiculaire à d et passant par A.



▶ Exercice n°8

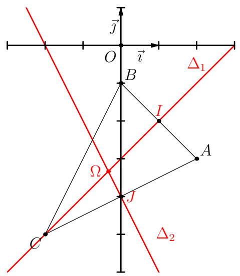
On considère les points $A\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

1.



a) Déterminer une équation de d_1, la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
b) Déterminer une équation de d_2, la hauteur issue de B dans le triangle ABC.
c) En déduire les coordonnées de H, l'orthocentre du triangle ABC.

2. On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$



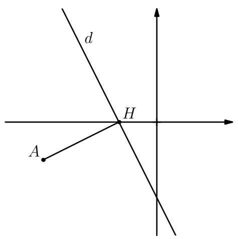
a) Déterminer une équation de Δ_1, la médiatrice de $[AB]$.

b) Déterminer une équation de Δ_2, la médiatrice de $[AC]$.

c) En déduire les coordonnées de Ω, le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

▶ Exercice n°9

Soit d la droite d'équation $2x + y + 2 = 0$ et le point $A\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.



1. Déterminer les coordonnées de H, le projeté orthogonal de A sur d.
2. En déduire la distance AH.

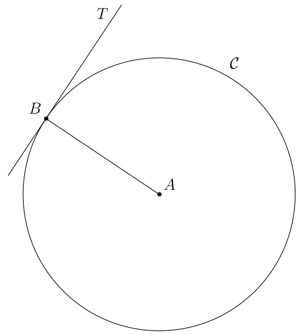
▶ Exercice n°10

1. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $\Omega\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de rayon 4.
2. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}_2$ de centre $I\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ passant par $C\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}_3$ de diamètre $[AB]$ avec $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

▶ Exercice n°11

On considère les points $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une équation de T, la tangente en B au cercle $\mathcal{C}$ de centre A passant par B.



2. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$.

▶ Exercice n°12

1. Montrer que $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 1 = 0$ est une équation d'un cercle dont on donnera le centre Ω et le rayon r.
2. Même question avec $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$.

▶ Exercice n°13

Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ et la droite d d'équation $2x - y - 1 = 0$.

▶ Exercice n°14

On rappelle que toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation, dite réduite, de la forme $y = mx + p$ dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

Justifier que dire que deux droites admettant comme équation réduite $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont perpendiculaires équivaut à dire que $m \times m' = -1$.