Spécialité - 1re générale

Complément sur les fonctions

https://www.xm1math.net

xm1math.net

1. Rappels

a) Généralités

Définition

Étant donné I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$, une fonction numérique f définie sur I est une relation qui à tout x de I associe un **unique** réel, noté $f(x)$ et appelé **image** de x par f.
Notations possibles :

- f est la fonction définie sur I par $f(x) = \cdots$
- $f: \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \cdots \end{array}$

Définition

Étant donné une fonction f définie sur I.
Pour tout réel b, on appelle **antécédents** de b par f, tous les réels x de I (s'ils existent) tels que $f(x) = b$.

1. Rappels

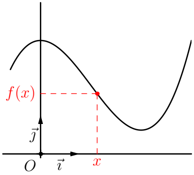
Exemple(s)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

1. L'image de $\sqrt{2}$ par f est $f\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}^2+1} = \dfrac{1}{3}$.
2. Les antécédents de $\dfrac{1}{4}$ par f sont les réels x tels que $f(x) = \dfrac{1}{4}$.
   Or, $f(x) = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x^2+1 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$.
   On en conclut que les antécédents de $\dfrac{1}{4}$ par f sont $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

Définition

Dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on appelle courbe représentative de la fonction f définie sur I, l'ensemble des points **d'abscisse** x **et d'ordonnée** $f(x)$ pour tous les x de I.
Notation courante : C_f .
Une équation cartésienne de la courbe est $y = f(x)$.



xm1math.net

1. Rappels

b) Parité d'une fonction

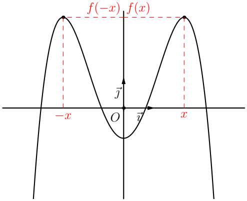
Définition

• Une fonction f définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ est dite **paire** si I est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout x de I, on a $f(-x) = f(x)$.

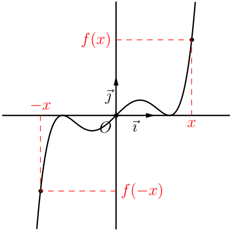
• Une fonction f définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ est dite **impaire** si I est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout x de I, on a $f(-x) = -f(x)$.

Propriété(s)

• *Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est* ***symétrique par rapport à l'axe des ordonnées****.*



• *La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.*



1. Rappels

c) Détermination de la position relative de deux courbes

Principe

Pour étudier la position des courbes représentatives des fonctions f et g, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$.

- Si, pour tout x d'un intervalle I, $f(x) - g(x)$ reste positif alors on peut conclure que la courbe de f est située au dessus de la courbe de g sur I.
- Si, pour tout x d'un intervalle I, $f(x) - g(x)$ reste négatif alors on peut conclure que la courbe de f est située en dessous de la courbe de g sur I.

Exemple(s)

Étude de la position relative des courbes des fonctions f et g définies sur $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = x$:

Pour tout x, $f(x) - g(x) = x^2 - x - 2$. $\Delta = 9 > 0$. Le trinôme est du signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines qui sont $x_1 = \dfrac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 2$.

On a donc la situation suivante :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
Signe de $f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Position relative		C_f au dessus de C_g		C_f en dessous de C_g		C_f au dessus de C_g	

xm1math.net

2. Fonctions périodiques

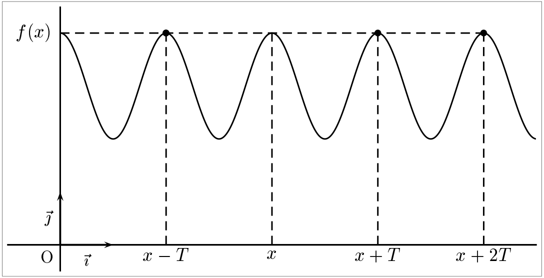
a) Généralités

Définition

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite **périodique de période** T si pour tout x, $f(x+T) = f(x)$.

Conséquences

- Pour tout x, $f(x+2T) = f(x+T+T) = f(x+T) = f(x)$
- Pour tout x, $f(x+3T) = f(x+2T+T) = f(x+2T) = f(x)$
- Conséquence : si T est une période alors $2T$, $3T$, $\cdots$ sont aussi des périodes.
- On doit avoir aussi $f(x-T+T) = f(x-T)$, ce qui équivaut à dire que $f(x) = f(x-T)$.
- De même on a $f(x-2T) = f(x)$, $f(x-3T) = f(x)$, $\cdots$



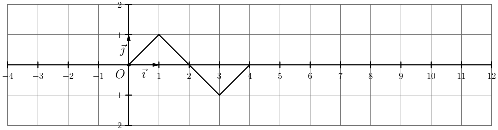
2. Fonctions périodiques

Propriété(s)

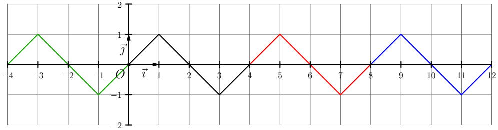
Si on connaît la courbe d'une fonction périodique f de période T sur un intervalle d'amplitude T, on peut retrouver toute la courbe de f en effectuant des translations de vecteur $T\vec{i}$, $2T\vec{i}$, $\cdots$, $-T\vec{i}$, $\cdots$ (ce qui revient à effectuer des « décalages horizontaux » de T, $2T$, $\cdots$, $-T$, $\cdots$)

Exemple(s)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 4 dont un extrait de la courbe est donnée ci-dessous :



Retrouver les parties de la courbe correspondantes aux intervalles $[4; 8]$, $[8; 12]$ et $[-4; 0]$.
Solution :



2. Fonctions périodiques

b) Cas des fonctions circulaires

Propriété(s)

Les fonctions, dites circulaires, définies sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = r\cos(\omega x + \varphi)$ *ou* $r\sin(\omega x + \varphi)$ *sont périodiques de période* $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Démonstration : pour tout x, $r\cos\left(\omega\left(x + \frac{2\pi}{w}\right) + \varphi\right) = r\cos(\omega x + 2\pi + \varphi) = r\cos(\omega x + \varphi)$ et $r\sin\left(\omega\left(x + \frac{2\pi}{w}\right) + \varphi\right) = r\sin(\omega x + 2\pi + \varphi) = r\sin(\omega x + \varphi)$.

Exemple(s)

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(3x)$ est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{3}$.
2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5\sin(2x - \frac{\pi}{4})$ est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.
3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$ est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.
4. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(\frac{1}{3}x)$ est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.
5. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(\frac{1}{2}x) + \cos(\frac{1}{3}x)$ est périodique de période $T = 12\pi$ (multiple commun de 4π et 6π) .

xm1math.net

3. Taux de variation d'une fonction

Définition

Étant donné une fonction f définie sur un intervalle I. Pour tous réels a et $h \neq 0$ tels que a et $a+h$ soient dans I, on appelle **taux de variation** de f entre a et $a+h$, le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

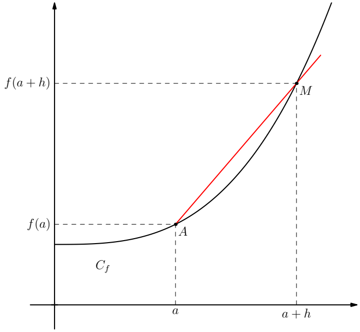
Propriété(s)

Le taux de variation de f entre a et $a+h$ correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points de la courbe de f d'abscisses a et $a+h$.

Preuve :
coefficient directeur de la droite (AM)

$$= \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}$$

$$= \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$



3. Taux de variation d'une fonction

Propriété(s)

- ***Si* f *est croissante sur un intervalle*** I *alors pour tous réels* a *et* $h \neq 0$ *tels que* a *et* $a+h$ *soient dans* I, ***le taux de variation de*** f ***entre*** a ***et*** $a+h$ ***est positif***.
- ***Si* f *est décroissante sur un intervalle*** I *alors pour tous réels* a *et* $h \neq 0$ *tels que* a *et* $a+h$ *soient dans* I, ***le taux de variation de*** f ***entre*** a ***et*** $a+h$ ***est négatif***.

Démonstration :

- Si f est croissante sur I :
  - si $h > 0$ alors $f(a+h) \geqslant f(a)$, donc
    $$\frac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{+}}{\underbrace{h}_{+}} \geqslant 0.$$
  - si $h < 0$ alors $f(a+h) \leqslant f(a)$, donc
    $$\frac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{-}}{\underbrace{h}_{-}} \geqslant 0.$$
- Si f est décroissante sur I :
  - si $h > 0$ alors $f(a+h) \leqslant f(a)$, donc
    $$\frac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{-}}{\underbrace{h}_{+}} \leqslant 0.$$
  - si $h < 0$ alors $f(a+h) \geqslant f(a)$, donc
    $$\frac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{+}}{\underbrace{h}_{-}} \leqslant 0.$$

xm1math.net

3. Taux de variation d'une fonction

Exemple(s)

1. Calcul du taux de variation entre a et $a+h$ pour la fonction carré :
pour tous réels a et $h \neq 0$,
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a+h$$

2. Calcul du taux de variation entre a et $a+h$ pour la fonction inverse :
pour tous réels $a>0$ et $h \neq 0$ tel que $a+h>0$,
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{a-a-h}{ha(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}$$
(on a le même résultat si $a>0$)

3. Calcul du taux de variation entre a et $a+h$ pour la fonction racine carrée :
pour tous réels $a \geqslant 0$ et $h \neq 0$ tel que $a+h \geqslant 0$,
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{a+h-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}$$
$$= \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

4. Nouvelles fonctions de référence

a) Fonction valeur absolue

Rappel

On appelle **valeur absolue** d'un réel x, le réel noté $|x|$, tel que :

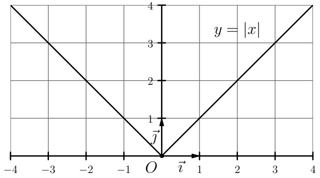
- si $x \geqslant 0$ alors $|x| = x$;
- Si $x < 0$ alors $|x| = -x$.

Exemples : $|3| = 3$; $|-3| = 3$

- La fonction valeur absolue est la fonction qui à tout réel x associe $|x|$.
- Elle est définie sur $\mathbb{R}$.
- Elle est paire car, pour tout x, $|-x| = x$.

(En effet, si $x \geqslant 0$, $\left|\underbrace{x}_{+}\right| = x$ et $\left|\underbrace{-x}_{-}\right| = -(-x)$ et si $x < 0$, $\left|\underbrace{x}_{-}\right| = -x$ et $\left|\underbrace{-x}_{+}\right| = -x$)

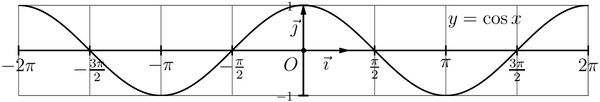
- Sa courbe représentative $[-4; 4]$ est :



4. Nouvelles fonctions de référence

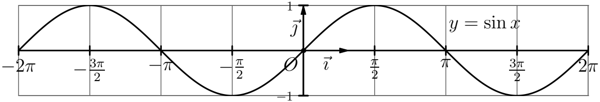
b) Fonction cosinus

- La fonction cosinus est la fonction qui à tout réel x associe $\cos x$.
- Elle est définie sur $\mathbb{R}$.
- Elle est paire car, pour tout x, $\cos(-x) = \cos x$.
- Elle est périodique de période 2π car, pour tout x, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.
- Sa courbe représentative sur $[-2\pi; 2\pi]$ est :



c) Fonction sinus

- La fonction sinus est la fonction qui à tout réel x associe $\sin x$.
- Elle est définie sur $\mathbb{R}$.
- Elle est impaire car, pour tout x, $\sin(-x) = \sin x$.
- Elle est périodique de période 2π car, pour tout x, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
- Sa courbe représentative sur $[-2\pi; 2\pi]$ est :



Fin du chapitre