# Complément sur les fonctions

## ▶ Exercice n°1

1. Image par $f$ de 3 : $f(3) = \dfrac{3^2 - 3}{3 - 2} = 6$

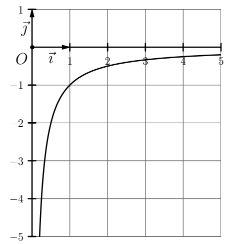
   Image par $f$ de $-1$ : $f(3) = \dfrac{(-1)^2 - 3}{-1 - 2} = \dfrac{2}{3}$
2. Ce sont les réels $x \neq 2$ tels que $f(x) = 0$ :
   Si $x \neq 2$, $\dfrac{x^2 - 3}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$.
   $x = \sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ sont les 2 antécédents de 0 par $f$.
3. Ce sont les réels $x \neq 2$ tels que $f(x) = 4$ :
   Si $x \neq 2$, $\dfrac{x^2 - 3}{x - 2} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 4(x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 3 = 4x - 8 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$.
   $\Delta = -4 < 0$. Il n'y a aucun antécédent de 4 par $f$.
4. Cela revient à déterminer les valeurs $m$ tels que l'équation $f(x) = m$ admette une unique solution.
   Si $x \neq 2$, $\dfrac{x^2 - 3}{x - 2} = m \Leftrightarrow x^2 - 3 = m(x - 2) \Leftrightarrow x^2 - mx + (2m - 3) = 0$.
   $\Delta_m = (-m)^2 - 4 \times 1 \times (2m - 3) = m^2 - 8m + 12$.
   $f(x) = m$ admettra une unique solution si et seulement si $m^2 - 8m + 12 = 0$ :
   $\Delta = 16 > 0$ ; $m_1 = \dfrac{8 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = 2$ ; $m_2 = \dfrac{8 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 6$.
   Les seuls réels qui admettent un unique antécédent par $f$ sont 2 et 6.
5. Pour tout $x \neq 2$, $f(x) - g(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2} - 2x \times \dfrac{x - 2}{x - 2} = \dfrac{x^2 - 3 - 2x^2 + 4x}{x - 2} = \dfrac{-x^2 + 4x - 3}{x - 2}$.
   Signe de $-x^2 + 4x - 3$ : $\Delta = 4 > 0$ ; « du signe de $a = -1$ à l'extérieur des racines » ; $x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{4}}{2 \times (-1)} = 3$ ; $x_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{4}}{2 \times (-1)} = 1$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2 + 4x - 3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x - 2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x) - g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Position relative | | $C_f$ au dessus de $C_g$ | | $C_f$ en dessous de $C_g$ | | $C_f$ au dessus de $C_g$ | | $C_f$ en dessous de $C_g$ | |

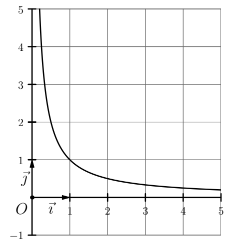
## ▶ Exercice n°2

On considère la proposition suivante : « Si $f$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ alors, pour tout $x$, $f(x)$ est positif ».

1. « Si $f$ est une fonction croissante sur $I$ alors il existe au moins un $x$ de $I$ pour lequel $f(x)$ est négatif ».
2. « Si pour tout $x$ de $I$, $f(x)$ est positif alors $f$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ ».
3. NON. Contre-exemple :



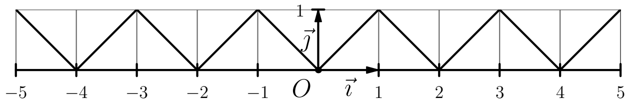

4. NON. Contre-exemple :




## ▶ Exercice n°3

1. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout $x$ :
   $p(-x) = \dfrac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} = p(x)$. $p$ est bien paire.
   $i(-x) = \dfrac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} = -\dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = -i(x)$.
   $i$ est bien impaire.
2. Pour tout $x$, $p(x) + i(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = \dfrac{2f(x)}{2} = f(x)$.

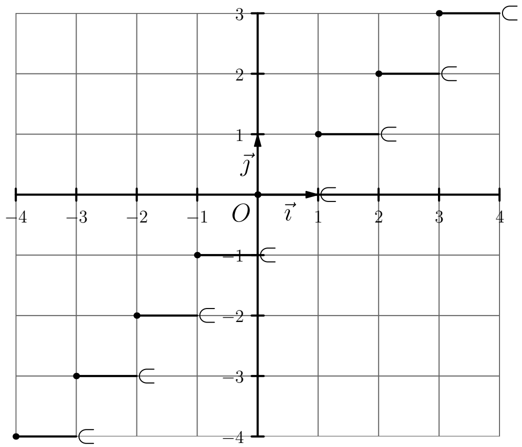
## ▶ Exercice n°4




## ▶ Exercice n°5

Pour tout réel $x$, il existe un unique entier relatif $n$ tel que $n \leqslant x < n+1$. Cet entier est appelé partie entière de $x$ et il est noté $E(x)$.

1. $E(2{,}4) = 2$ car $2 \leqslant 2{,}4 < 3$
   $E(3) = 3$ car $3 \leqslant 3 < 4$
   $E(-1{,}5) = -2$ car $-2 \leqslant -1{,}5 < -1$
   $E(-3{,}7) = -4$ car $-4 \leqslant -3{,}7 < -3$
2. Représenter la courbe de la fonction partie entière sur $[-4; 4[$ dans le repère ci-dessous :




3. $\underbrace{n}_{E(x)} \leqslant x < n+1 \Leftrightarrow \underbrace{n}_{E(x)} + 1 \leqslant x+1 < n+2$. Donc on a bien, $E(x+1) = E(x)+1$.
4. Pour tout $x$, $f(x+1) = x+1-E(x+1) = x+1-(E(x)+1) = x-E(x) = f(x)$. $f$ est bien périodique de période 1.

## ▶ Exercice n°6

1. $f(x) = \sin(2x)$. Une période est $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$
2. $f(x) = 3\cos\left(\dfrac{1}{2}x\right)$. Une période est $T = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$
3. Pour $3\cos(2x)$, une période est $T_1 = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$
   Pour $\sin x$,une période est $T_2 = 2\pi$
   Donc, pour $f$, une période est $2\pi$ (plus petit multiple commun de $T_1$ et $T_2$)
4. Pour $2\cos\left(\dfrac{1}{3}x\right)$, une période est $T_1 = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$
   Pour $\cos\left(\dfrac{1}{4}x\right)$,une période est $T_2 = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$
   Donc, pour $f$, une période est $24\pi$ (plus petit multiple commun de $T_1$ et $T_2$)



## ▶ Exercice n°7

1. $T = 4\pi$
2. a) $T = \dfrac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow 4\pi = \dfrac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \omega = \dfrac{2\pi}{4\pi} = \dfrac{1}{2}$.
   b) Pour tout $x$, $-1 \leqslant \cos(\omega x + \varphi) \leqslant 1$, donc le maximum de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ doit être égal à $r$ (et le minimum à $-r$). On doit donc avoir $r = 6$ d'après le graphique.
   c) $f(0) = 6\cos\left(\dfrac{1}{2} \times 0 + \varphi\right) = 6\cos\varphi$. Or d'après le graphique $f(0) = 3\sqrt{2}$.
   On doit donc avoir $6\cos\varphi = 3\sqrt{2}$. D'où $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ avec $\varphi \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ et que $f(x) = 6\cos\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

## ▶ Exercice n°8

1. 
   - *Étape 1* : On se place dans l'intervalle $[0; 2]$ dont le milieu est $m = 1$.
     Or, $f(m) = f(1) = 1$ qui est inférieur à 2 donc $x_0 \in [1\,;\,2]$.
   - *Étape 2* : On se place dans l'intervalle $[1\,;2]$ dont le milieu est $m = 1{,}5$
     Or, $f(m) = f(1{,}5) \approx 1{,}837$ qui est inférieur à 2
     donc $x_0 \in [1{,}5; 2]$.
   - *Étape 3* : On se place dans l'intervalle $[1{,}5; 2]$ dont le milieu est $m = 1{,}75$
     Or, $f(m) = f(1{,}75) \approx 2{,}318$ qui est supérieur à 2
     donc $x_0 \in [1{,}5; 1{,}75]$.
   - *Étape 4* : On se place dans l'intervalle $[1{,}5; 1{,}75]$ dont le milieu est $m = 1{,}625$
     Or, $f(m) = f(1{,}625) \approx 2{,}071$ qui est supérieur à 2
     donc $x_0 \in [1{,}5; 1{,}625]$.
2. À partir des résultats obtenus à la question précédente, compléter le tableau suivant :

| Étape | Intervalle de départ $[a;b]$ | milieu $m$ | $f(m)<2$ ? | Nouvel intervalle $[a;b]$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $a=0\,;\,b=2$ | $m=1$ | OUI | $a=1\,;\,b=2$ |
| 2 | $a=1\,;\,b=2$ | $m=1{,}5$ | OUI | $a=1{,}5\,;\,b=2$ |
| 3 | $a=1{,}5\,;\,b=2$ | $m=1{,}75$ | NON | $a=1{,}5\,;\,b=1{,}75$ |
| 4 | $a=1{,}5\,;\,b=1{,}75$ | $m=1{,}625$ | NON | $a=1{,}5\,;\,b=1{,}625$ |

3.

```
from math import *
def f(x):
  return x*sqrt(x)
a=0
b=2
for etape in range(4):
  m=(a+b)/2
  if f(m)<2:
    a=m
  else:
    b=m
  print(a,"<x0<",b)
```