Fonction exponentielle

▶ Exercice n°1

1. $e^4 \times e^2 = e^6$
2. $(e^{-x})^2 \times e^{3x} = e^x$
3. $\dfrac{e^{2x}}{e^{-3x}} = e^{5x}$
4. $\dfrac{e^{4x} \times e^{-3x}}{e^{-x}} = e^{2x}$
5. $e^{-8} \times e^5 = e^{-3}$
6. $e^{11x} \times e^{-4x} = e^{7x}$
7. $\dfrac{e^{-4}}{e^{-3}} = e^{-1}$
8. $\dfrac{e^{4x}}{e^{-7x}} \times e^{-6x} = e^{5x}$

▶ Exercice n°2

1. $e^{-0,5x} = e^2 \Leftarrow -0,5x = 2 \Leftrightarrow x = -4$. $S = \{-4\}$.
2. $e^{x+2} = 1 \Leftrightarrow e^{x+2} = e^0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$. $S = \{-2\}$.
3. $e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = -1$. Impossible. $S = \varnothing$
4. $e^{x^2-x-11} = e \Leftrightarrow e^{x^2-x-11} = e^1 \Leftrightarrow x^2 - x - 11 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$.
   $\Delta = 49$; $x_1 = -3$; $x_2 = 4$. $S = \{-3\,;\,4\}$.
5. $e^{2x} \geqslant e^{x+1} \Leftrightarrow 2x \geqslant x + 1 \Leftrightarrow x \geqslant 1$. . $S = [1\,;\,+\infty[$.
6. $e^{-x} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow e^{-x} < e^0 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$. $S =]0\,;\,+\infty[$.

▶ Exercice n°3

1. $f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (1 + x)e^x$
2. $f'(x) = \dfrac{2x \times e^x - x^2 \times e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{(2x - x^2) \times e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{2x - x^2}{e^x}$
3. $f'(x) = -2x \times e^x + (1 - x^2) \times e^x = (-2x + 1 - x^2)e^x$
4. $f'(x) = -\dfrac{e^x}{(3 + e^x)^2}$
5. $f'(x) = 2 \times (-e^x)(1 - e^x) = -2e^x(1 - e^x)$
6. $f'(x) = -0,8e^{-0,8x}$
7. $f'(x) = 3 \times 2e^{2x} + 5(-e^{-x}) = 6e^{2x} - 5e^{-x}$
8. $f'(x) = 2 \times e^{-0,5x} + 2x \times \left(-0,5e^{-0,5x}\right) = 2e^{-0,5x} - xe^{-0,5x} = (2 - x)e^{-0,5x}$

▶ Exercice n°4

$f'(x) = 2 \times e^x + 2x \times e^x = (2x + 2)e^x$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$2x+2$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-2e^{-1}$	$\nearrow$	

▶ Exercice n°5

1. $f'(x) = \dfrac{1 \times e^x - (x + 1) \times e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{-xe^x}{(e^x)^2} = \dfrac{-x}{e^x}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Donc le point A est d'abscisse -1 et d'ordonnée 0.
3. Une équation de T est $y = f(-1) + f'(-1)((x - (-1)) \Leftrightarrow y = ex + e$, car $f(-1) = 0$ et $f'(-1) = \dfrac{-(-1)}{e^{-1}} = e^1 = e$.

▶ Exercice n°6

1. On a $g(0) = Ae^0 = A$.
2. a) $g(10) \approx 1,70$.
   b) $g'(t) = 2 \times (-0,016)\, e^{-0,016t} = -0,032\, e^{-0,016t}$ qui est toujours strictement négatif, car un exponentiel est toujours strictement positif.

▶ Exercice n°7

1. $f(0) = 10\, e^0 = 10$.
2. Non, car un exponentiel est toujours strictement positif. De plus $20t + 10$ reste positif car $t \geqslant 0$.
3. $f'(t) = 20 \times e^{-0,5t} + (20t + 10)\left(-0,5\, e^{-0,5t}\right) = 20\, e^{-0,5t} - 10t\, e^{-0,5t} - 5\, e^{-0,5t}$
   $= (15 - 10t)e^{-0,5t}$

t	0		$1,5$		$+\infty$
$15-10t$		$+$	0	$-$	
$e^{-0,5t}$		$+$		$+$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	10	$\nearrow$	$40\, e^{-0,75}$	$\searrow$	

▶ Exercice n°8

$f'(x) = 50\,\mathrm{e}^{-0,5x+1} + 50x\left(-0,5\,\mathrm{e}^{-0,5x+1}\right) = 50\,\mathrm{e}^{-0,5x+1} - 25x\,\mathrm{e}^{-0,5x+1}$
$= (50-25x)\mathrm{e}^{-0,5x+1}$

x	0		2		$+\infty$
$50-25x$		$+$	0	$-$	
$\mathrm{e}^{-0,5x+1}$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	100	$\searrow$	

Le taux d'hydratation sera maximal au bout de 2 heures.

▶ Exercice n°9

1. • sur 10 ans : 4082,64 euros car $f(10) \approx 4{,}08264$
   • sur 15 ans : 4011,55 euros car $f(15) \approx 4{,}01155$
2. $f'(t) = 4 \times \left(\dfrac{-\left(-\left(-0,39\,\mathrm{e}^{-0,39t}\right)\right)}{\left(1-\mathrm{e}^{-0,39t}\right)^2} \right) = \dfrac{-1,56\,\mathrm{e}^{-0,39t}}{\left(1-\mathrm{e}^{-0,39t}\right)^2}$.
   Le carré et l'exponentiel restant positif, $f'(t)$ reste négative sur $[1\,;+\infty[$.
3. a) $t > 0 \Rightarrow -0,39t < 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{-0,39t} < 1 \Rightarrow -\mathrm{e}^{-0,39t} > -1 \Rightarrow 1-\mathrm{e}^{-0,39t} > 0$.
   b) $f(t) - 4 = \dfrac{4-4\left(1-\mathrm{e}^{-0,39t}\right)}{1-\mathrm{e}^{-0,39t}} = \dfrac{4\,\mathrm{e}^{-0,39t}}{1-\mathrm{e}^{-0,39t}}$.
   c) Le numérateur de $f(t)-4$ est positif à cause de l'exponentiel et le dénominateur est aussi positif d'après la question 3.a). On peut en conclure que $f(t)-4$ reste toujours positif et donc que $f(t)$ est toujours supérieur à 4 milliers d'euros.

▶ Exercice n°10

Pour tout n, $U_n > 0$ et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{20 \times \mathrm{e}^{-0,5(n+1)}}{20 \times \mathrm{e}^{-0,5n}} = \mathrm{e}^{-0,5n-0,5+0,5n} = \mathrm{e}^{-0,5}$ qui est constant.
Donc (U_n) est géométrique de raison $q = \mathrm{e}^{-0,5}$. Et comme on a $U_0 = 20 > 0$ et $0 < q < 1$, on peut en conclure que (U_n) est décroissante.