Dérivation

▶ Exercice n°1

1. $f'(x) = 2x$
2. $f'(x) = 6x - 1$
3. $f'(x) = -10x + \frac{1}{2}$
4. $f'(x) = x^2 + 2$
5. $f'(x) = -6x^2 + \frac{3}{2}x + 7$
6. $f'(x) = \frac{8}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x$

▶ Exercice n°2

1. $f(x) = -4 \times \frac{1}{x}$; $f'(x) = -4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4}{x^2}$
2. $f(x) = 2 \times \frac{1}{x} - x^2 + 7$; $f'(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 2x = -\frac{2}{x^2} - 2x$
3. $f(x) = 4\sqrt{x} - 6 \times \frac{1}{x}$; $f'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 6 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x^2}$

▶ Exercice n°3

forme fg

1. $f'(x) = 2x \times \sqrt{x} + x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$
2. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (x^2 + 1) + (\sqrt{x} + 2) \times 2x$
3. $f'(x) = (2x - 2)(x - \sqrt{x}) + (x^2 - 2x + 5)\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$
4. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 - 2) + (\sqrt{x} + 1) \times 2x$

▶ Exercice n°4

forme f^2

1. $f'(x) = 2 \times 2 \times (2x - 5) = 4(2x - 5)$
2. $f'(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}x + 3\right) = -\left(-\frac{1}{2}x + 3\right)$
3. $f'(x) = 2 \times (2x - 1)(x^2 - x + 1)$
4. $f'(x) = 2 \times \left(6x + \frac{1}{x^2}\right) \times \left(3x^2 - \frac{1}{x} + 7\right)$

▶ Exercice n°5

forme $\frac{1}{f}$

1. $f'(x) = -\frac{1}{(x+3)^2}$
2. $f'(x) = -\frac{3}{(3x-7)^2}$
3. $f(x) = 3 \times \frac{1}{5x+10}$; $f'(x) = 3 \times \left(-\frac{5}{(5x+10)^2}\right) = -\frac{15}{(5x+10)^2}$
4. $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$
5. $f'(x) = -\frac{(8x-1)}{(4x^2-x-3)^2}$
6. $f(x) = -4 \times \frac{1}{x^2+x+1}$; $f'(x) = -4 \times \left(-\frac{(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}\right) = \frac{8x+4}{(x^2+x+1)^2}$

▶ Exercice n°6

forme $\frac{f}{g}$

1. $f'(x) = \frac{1 \times (x+1) - (x-1) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$
2. $f'(x) = \frac{-2 \times (4x+3) - (-2x+5) \times 4}{(4x+3)^2} = \frac{-8x - 6 + 8x - 20}{(4x+3)^2} = \frac{-26}{(4x+3)^2}$
3. $f'(x) = \frac{2x \times (x-2) - (x^2+1) \times 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2 - 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 1}{(x-2)^2}$
4. $f'(x) = \frac{4x(x^2+7) - (2x^2-3) \times (x^2+7)}{(x^2+7)^2}$
$= \frac{4x^3 + 28x - 4x^3 + 6x}{(x^2+7)^2} = \frac{34x}{(x^2+7)^2}$
5. $f'(x) = \frac{(2x-2)(3x^2+4x+7) - (x^2-2x+5)(6x+4)}{(3x^2+4x+7)^2}$
$= \frac{6x^3 + 8x^2 + 14x - 6x^2 - 8x - 14 - 6x^3 - 4x^2 + 12x^2 + 8x - 30x - 20}{(3x^2+4x+7)^2}$
$= \frac{10x^2 - 16x - 34}{(3x^2+4x+7)^2}$
6. $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times (2x+1) - \sqrt{x} \times 2}{(2x+1)^2}$

▶ Exercice n°7

1. $f(x) = -x^2 + 6x - 8 \quad a = -1$:
$f(-1) = -15$; $f'(x) = -2x + 6$; $f'(-1) = 8$
$y = -15 + 8\,(x - (-1)) \Leftrightarrow y = 8x - 7$

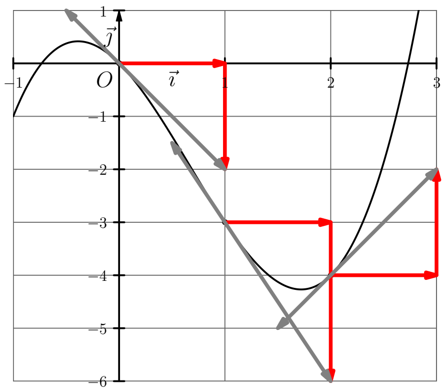
2. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}\quad a=4$:
$f(4)=9\,;\ f'(x)=\dfrac{2\times(x-3)-(2x+1)\times 1}{(x-3)^2}=\dfrac{-7}{(x-3)^2}\,;\ f'(4)=-7$
$y=9-7\,(x-4)\Leftrightarrow y=-7x+37$
3. $f(x)=\dfrac{1}{5x+9}\quad a=-2$:
$f(-2)=-1\,;\ f'(x)=\dfrac{-5}{(5x+9)^2}\,;\ f'(-2)=-5$
$y=-1-5\,(x-(-2))\Leftrightarrow y=-5x-11$

▶ Exercice n°8

1. $f'(2)=$ coefficient directeur de la tangente en $A=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{0-(-2)}{4-2}=1$.
2. $f'(4)=$coefficient directeur de la tangente en $C=\dfrac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\dfrac{4-3}{6-4}=\dfrac{1}{2}$.
3. $f'(6)=$ coefficient directeur de la tangente en $E=\dfrac{y_F-y_E}{x_F-x_E}=\dfrac{-2-0}{7-6}=-2$.

▶ Exercice n°9

On a $f'(x)=3x^2-4x-2\,;\ f'(0)=-2\,;\ f'(0)=-3$ et $f'(2)=2$



▶ Exercice n°10

Dire que le coefficient directeur de la tangente est égal à 3 équivaut à dire que la valeur de la dérivée est égale à 3.
On a $f'(x)=\dfrac{3\times(x-1)-(3x+2)\times 1}{(x-1)^2}=\dfrac{-5}{(x-1)^2}$.
Avec $x\neq 1$, $f'(x)=-5\Leftrightarrow\dfrac{-5}{(x-1)^2}=-5\Leftrightarrow(x-1)^2=1\Leftrightarrow x^2-2x+1=1$
$\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow x(x-2)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=2$.
Les points de la courbe d'abscisse 0 et 2 conviennent.
Tangente au point d'abscisse 0 : $y=f(0)+f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=-2-5x$
Tangente au point d'abscisse 2 : $y=f(2)+f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=8-5(x-2)\Leftrightarrow y=-5x+18$

▶ Exercice n°11

On a $f'(x)=\dfrac{(-2x+2)\times x-(-x^2+2x-1)\times 1}{x^2}=\dfrac{1-x^2}{x^2}$ et le coefficient directeur d'une tangente est égal à la valeur de la dérivée.

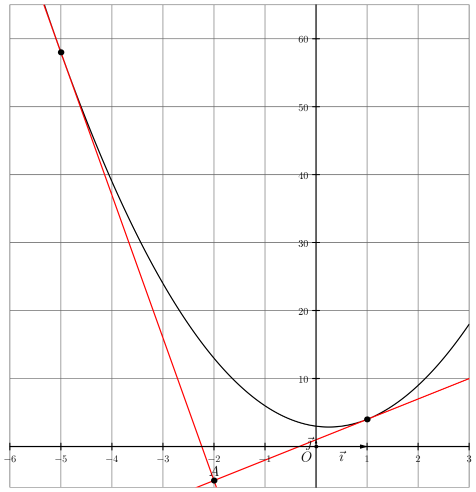
a) tangente horizontale $\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$.
Les points de la courbe d'abscisse 1 et -1 conviennent.

b) coefficient directeur de la tangente $=-2\Leftrightarrow f'(x)=-2\Leftrightarrow\dfrac{1-x^2}{x^2}=-2\Leftrightarrow 1-x^2=-2x^2\ (x\neq 0)\Leftrightarrow x^2=-1$. Impossible.
Aucun point de la courbe ne peut convenir.

c) tangente parallèle à la droite d'équation $y=-\frac{2}{3}x-5\Leftrightarrow$ coefficient directeur de la tangente $=$ coefficient directeur de la droite d'équation $y=-\frac{2}{3}x-5$
$\Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\dfrac{1-x^2}{x^2}=-\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow 3-3x^2=-2x^2\ (x\neq 0)\Leftrightarrow x^2=3$
$\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ ou $x=-\sqrt{3}$.
Les points de la courbe d'abscisse $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ conviennent.

▶ Exercice n°12

Déterminons d'abord la forme générale de l'équation de la tangente au point d'abscisse a (sachant que $f'(x)=4x-1$) :
$y=f(a)+f'(a)(x-a)\Leftrightarrow y=2a^2-a+3+(4a-1)(x-a)$
$\Leftrightarrow 2a^2-a+3+4ax-4a^2-x+a\Leftrightarrow y=(4a-1)x+3-2a^2$
Dire que $A\begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$ est sur une tangente équivaut à dire qu'il existe des a tels que les coordonnées de A vérifient l'équation de la tangente.
$y_A=(4a-1)x_A+3-2a^2\Leftrightarrow -5=(4a-1)\times(-2)+3-2a^2$
$\Leftrightarrow -5=-8a+2+3-2a^2\Leftrightarrow 2a^2+8a-10=0$
$\Delta=144\,;\ a_1=\dfrac{-8-\sqrt{144}}{2\times 2}=\dfrac{-8-12}{4}=-5\,;\ a_1=\dfrac{-8+\sqrt{144}}{2\times 2}=\dfrac{-8+12}{4}=1$.
Conclusion : le point A appartient à deux des tangentes à la courbe de f (celles d'abscisse -5 et 1).



▶ Exercice n°13

1. $d'(t) = 10t$, donc $d'(3) = 30$
2. a) $d(3) = 45\,\text{m}$.
   b) $d(3{,}1) = 48{,}05\,\text{m}$.
   La vitesse moyenne de l'objet entre les instants $t = 3$ et $t = 3{,}1$ est égale à $\dfrac{d(3{,}1) - d(3)}{0{,}1} = 30{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
   c) $d(3{,}01) = 45{,}3005\,\text{m}$
   La vitesse moyenne de l'objet entre les instants $t = 3$ et $t = 3{,}01$.est égale à $\dfrac{d(3{,}01) - d(3)}{0{,}01} = 30{,}05\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.
   La vitesse moyenne entre les instants $t = 3$ et t' se rapproche de $d'(3)$ quand t' se rapproche de 3.
3. a) $100\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ correspond à $\dfrac{100 \times 1000}{3600} \approx 27{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
   On cherche t tel que $d'(t) = 27{,}8 \Leftrightarrow 10t = 27{,}8$. On trouve $t \approx 2{,}78\,\text{s}$.
   La distance parcourue est alors $d(2{,}78) \approx 38{,}6\,\text{m}$
   b) On cherche d'abord au bout de combien de temps aura lieu l'impact au sol, ce qui revient à déterminer t tel que $d(t) = 30$:
   $5t^2 = 30 \Leftrightarrow t^2 = 6 \Leftrightarrow t = \sqrt{6}$ ou $t = -\sqrt{6}$. Seul $t = \sqrt{6} \approx 2{,}45\,\text{s}$ convient.
   La vitesse instantanée à ce moment là est égale à $d'(2{,}45) \approx 24{,}5\,\text{s}^{-1}$ ce qui correspond à $24{,}5 \times \dfrac{3600}{1000} \approx 88\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

▶ Exercice n°14

1. Pour tout x, on a $f(x) = ax^3 + bx^2$ et $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$.
   Donc a bien $f(0) = 0 + 0 = 0$ et$f'(0) = 0 + 0 = 0$.
2. $\begin{cases} f(4) = 3 \\ f'(4) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 64a + 16b = 3 \\ 48a + 8b = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 - 2L_2 \\ 3L_1 - 4L_2 \end{matrix} \begin{cases} -32a = 2 \\ 16b = 7 \end{cases}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{16} \\ y = \frac{7}{16} \end{cases}$
   Il faut $f(x) = -\frac{1}{16}x^3 + \frac{7}{16}x^2$.

▶ Exercice n°15

1. On a $f'(t) = \dfrac{50(t^2+4) - 50t \times 2t}{(t^2+4)^2} = \dfrac{-50t^2 + 200}{(t^2+4)^2}$.
   La vitesse de concentration au bout de 2 heures :
   $f'(2) = \dfrac{-50 \times 2^2 + 200}{(2^2+4)^2} = 0\ \text{mg}\cdot\text{h}^{-1}$
2. $f'(t) = 6 \Leftrightarrow \dfrac{-50t^2 + 200}{(t^2+4)^2} = 6 \Leftrightarrow -50t^2 + 200 = 6(t^2+4)^2$
   $\Leftrightarrow -50t^2 + 200 = 6t^4 + 48t^2 + 96 \Leftarrow 6t^4 + 98t^2 - 104 = 0.$
   En posant $x = t^2$, l'équation devient $6X^2 + 98X - 104 = 0$:
   $\Delta = 12100$
   $X_1 = \dfrac{-98 - \sqrt{12100}}{2 \times 6} = \dfrac{-98 - 110}{12} = -\dfrac{52}{3}$
   $X_2 = \dfrac{-98 + \sqrt{12100}}{2 \times 6} = \dfrac{-98 + 110}{12} = 1$
   On doit donc avoir $t^2 = -\dfrac{52}{3}$ (impossible) ou $t^2 = 1$, ce qui donne $t = 1$ ou $t = -1$ (impossible).
   C'est donc qu'au bout d'une heure que la vitesse de concentration sera égale à $6\text{mg}\cdot\text{h}^{-1}$.

▶ Exercice n°16

1. « Si f' est définie par $f'(x) = 2x$ alors f est définie par $f(x) = x^2 + 1$ ».
2. OUI
3. NON. Ce n'est qu'une possibilité. f est définie par $f(x) = x^2$ conviendrait aussi.

▶ **Exercice n°17**

1. $f'(x) = 20x \times \sqrt{x} + 10x^2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 20x \times \sqrt{x} \times \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \dfrac{5x^2}{\sqrt{x}} = \dfrac{25x^2}{\sqrt{x}}$.
2. $f'(1) = 25$
3. $f'(2) = \dfrac{100}{\sqrt{2}} \approx 70{,}7$
4.

```
from math import *
a=1
while 25*a*a/sqrt(a)<50:
  a=a+0.01
print(a)
```