Inégalités

▶ Exercice n°1

Compléter les encadrements suivants :

1. si $1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$ alors $\quad \leqslant -2x \leqslant$ donc $\quad \leqslant -2x+1 \leqslant$
2. si $-4 < x < -\frac{1}{2}$ alors $\quad < 3x <$ donc $\quad < 3x-1 <$
3. si $-2 < x < \sqrt{2}$ alors $\quad < -x <$ donc $\quad < 2-x <$
4. si $-5 \leqslant x \leqslant 2$ alors $\quad \leqslant -x \leqslant$ donc $\quad \leqslant 4-x \leqslant$
5. si $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3$ alors $\quad \leqslant x^2 \leqslant$ donc $\quad \leqslant x^2-4 \leqslant$
6. si $\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 7$ alors $\quad \leqslant \frac{1}{x} \leqslant$ donc $\quad \leqslant \frac{2}{x} \leqslant$
7. si $-6 \leqslant 12x \leqslant 2$ alors $\quad \leqslant x \leqslant$
8. si $-4 < 3x-1 < 8$ alors $\quad < 3x <$ donc $\quad < x <$
9. si $-\frac{3}{2} \leqslant 1-2x \leqslant \frac{5}{4}$ alors $\quad \leqslant -2x \leqslant$ donc $\quad \leqslant x \leqslant$
10. si $-10 \leqslant 7-x \leqslant 1$ alors $\quad \leqslant -x \leqslant$ donc $\quad \leqslant x \leqslant$
11. si $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{3}{4}$ alors $\quad \leqslant x \leqslant$
12. si $3 \leqslant \frac{3}{x} \leqslant 12$ alors $\quad \leqslant \frac{1}{x} \leqslant$ donc $\quad \leqslant x \leqslant$

▶ Exercice n°2

On considère deux réels x et y tels que $1 \leqslant x \leqslant 3$ et $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}$.

1. Déterminer un encadrement de $x+y$, xy, $x+2y$ et $-3xy$.
2. Déterminer un encadrement de $-y$. En déduire celui de $x-y$.
3. Déterminer un encadrement de $\frac{1}{y}$. En déduire celui de $\frac{x}{y}$.

▶ Exercice n°3

On considère deux réels x et y tels que $-2 < x < -1$ et $3 < y < 6$.

1. Déterminer un encadrement de $-x$. En déduire celui de $-xy$, puis de xy.
2. Déterminer un encadrement de $\frac{1}{y}$. En déduire celui de $\frac{-x}{y}$, puis de $\frac{x}{y}$.

▶ Exercice n°4

On considère deux réels x et y tels que $-4 < x < -1$ et $-3 < y < -2$.
Déterminer un encadrement de xy et de $\frac{x}{y}$

▶ Exercice n°5

Soit x un réel tel que $2 \leqslant x \leqslant 5$.
Déterminer un encadrement de x^2 , $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, $3x^2-1$, $\frac{2}{x}-1$, $\sqrt{x}-x^2$.

▶ Exercice n°6

Écrire sous forme d'intervalles les ensembles de réels définis par :

a) $3 \leqslant x \leqslant 4$	b) $4 < x < 7$	c) $-2 < x \leqslant 5$
d) $-\frac{1}{4} \leqslant x < \frac{1}{2}$	e) $\sqrt{2} < x \leqslant \sqrt{3}$	f) $x \leqslant 2$
g) $x \geqslant -\frac{1}{4}$	h) $x < \sqrt{3}$	

▶ Exercice n°7

L'épaisseur d'un écran e doit être comprise :

- dans l'intervalle [0,67 ; 0,69], selon la norme européenne ;
- dans l'intervalle [0,68 ; 0,72], selon la norme américaine ;

Un fabricant désire respecter les deux normes. Dans quel intervalle doit se situer l'épaisseur des écrans qu'il fabrique ?

▶ Exercice n°8

Déterminer les intersections et réunions d'intervalles suivantes :

a) $]-3;4]\bigcap[2;7[$	b) $\left]-\frac{1}{2};8\right[\bigcap]4;6]$	c) $]-2;4]\bigcap[4;6[$
d) $[-8;4[\bigcap]10;20]$	e) $]2;5]\bigcap[3;6]$	f) $[-3;3]\bigcap\left]\frac{1}{2};5\right[\bigcap[-1;2[$
g) $\left]-\frac{7}{4};+\infty\right[\bigcap]-\infty;1[$	h) $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[\bigcap\left]-6;\frac{1}{3}\right[$	i) $]5;10]\bigcup[3;6]$
j) $[2;6]\bigcup[4;+\infty[$	k) $]5;14[\bigcup]-7;9[$	l) $[8;12]\bigcup]7;8[$

▶ Exercice n°9

a et b étant deux réels strictement positifs.

1. Calculer $\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\sqrt{a+b}\right]\times\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{a+b}\right]$. En déduire que ce produit est strictement positif.
2. En déduire que $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\sqrt{a+b}$ est toujours strictement positif et que, pour tous réels a et b strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$.