Vecteurs du plan - Seconde

©Pascal Brachet (CC BY NC SA)

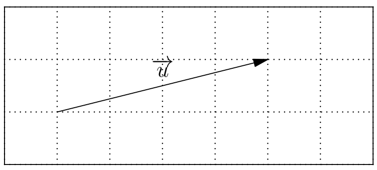
https://www.xm1math.net

1. Généralités sur les vecteurs

a) Caractérisation d'un vecteur non nul

Définition

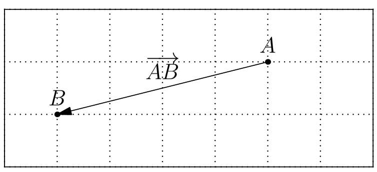
Une direction, un sens et une longueur non nulle définissent un unique vecteur non nul $\overrightarrow{u}$.
(la direction est indiquée par la droite portant $\overrightarrow{u}$*, le sens est indiqué par la flèche)*



b) Vecteur défini par deux points distincts

Définition

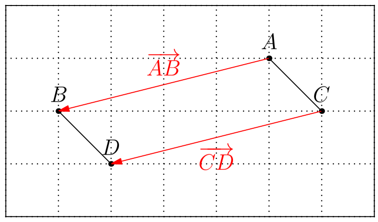
Étant donné deux points distincts A et B :
Le vecteur caractérisé par la direction de la droite (AB), le sens de A vers B et la longueur AB est noté $\overrightarrow{AB}$.
Le point A est dit **origine** du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Le point B est dit **extrémité** du vecteur $\overrightarrow{AB}$.



1. Généralités sur les vecteurs

Propriété(s)

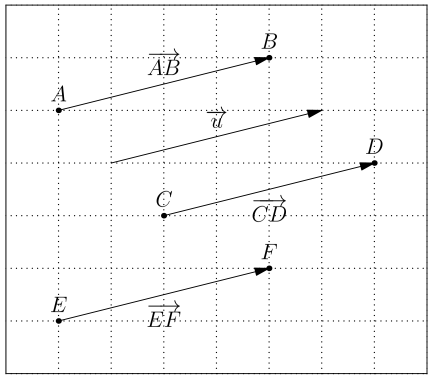
Étant donné quatre points A, B, C et D avec $A \neq B$.
Dire que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux équivaut à dire que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.



c) Représentants d'un vecteur non nul

Pour avoir deux vecteurs égaux, il suffit donc de construire un parallélogramme.
▶ Conséquences :

- Étant donné un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$, il existe une infinité de vecteurs ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\cdots$) égaux à $\overrightarrow{u}$.
- Ces vecteurs sont dits **représentants** du vecteur $\overrightarrow{u}$. Il y en a donc une infinité si on a le choix de l'origine du représentant.
- Mais si on fixe l'origine du représentant, le vecteur $\overrightarrow{u}$ n'admet qu'un seul représentant partant de cette origine. Autrement dit, pour tout point A il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.



1. Généralités sur les vecteurs

d) Norme d'un vecteur non nul

Définition

La longueur d'un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ est aussi appelée **norme** de $\overrightarrow{u}$ et est notée $\|\overrightarrow{u}\|$.

Conséquence : si le vecteur est défini par deux points A et B, la norme de $\overrightarrow{AB}$ est égale à la distance AB. Autrement dit, $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

e) Vecteur nul

Définition

Pour tout point A, on pose que $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ où $\overrightarrow{0}$ est appelé vecteur nul.

▶ Remarque : le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ n'a ni direction, ni sens et il est de longueur nulle.

f) Vecteur unitaire

Définition

On appelle **vecteur unitaire**, tout vecteur de longueur égale à 1 (dans l'unité choisie).

Autrement dit, dire qu'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est unitaire équivaut à dire que $\|\overrightarrow{u}\| = 1$.

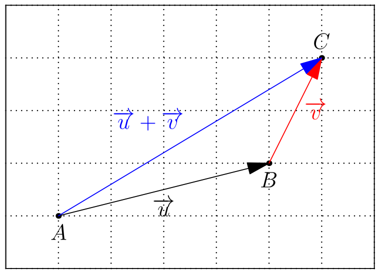
2. Somme et différence de deux vecteurs

a) Somme de deux vecteurs

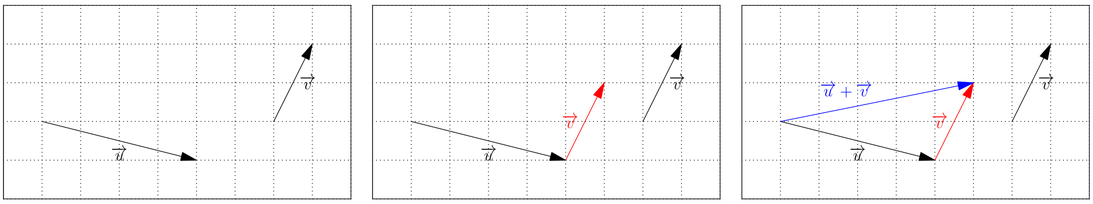
Définition

• Étant donné deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et A un point du plan.
Si on note B et C les points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, on appelle alors somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur, noté $\vec{u} + \vec{v}$, représenté par $\overrightarrow{AC}$.

• Par convention, on pose $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ et $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.



Méthode générale de construction de $\vec{u} + \vec{v}$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls) :

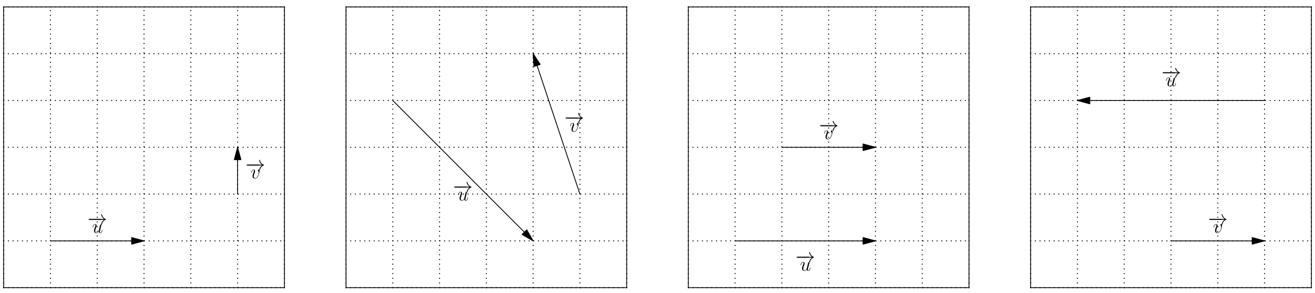


1. On trace le représentant de $\vec{v}$ ayant pour origine l'extrémité de $\vec{u}$ (« *on met le deuxième vecteur au bout du premier* »).
2. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ s'obtient en joignant l'origine de $\vec{u}$ avec l'extrémité du représentant de $\vec{v}$ que l'on vient de placer au bout de $\vec{u}$.

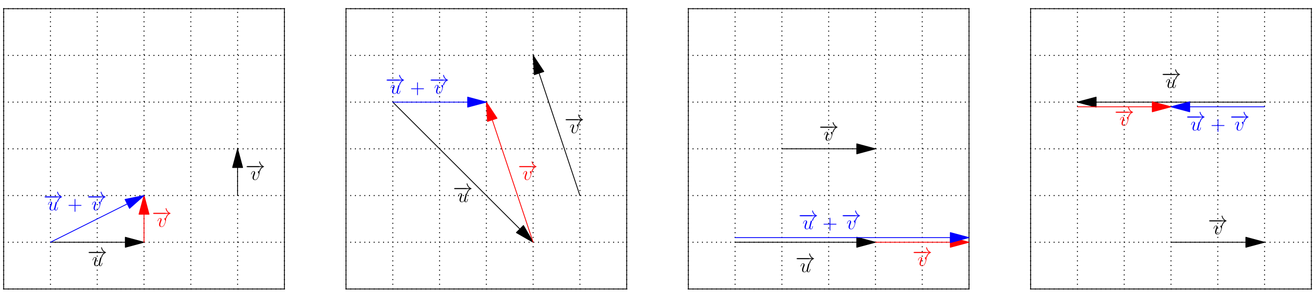
2. Somme et différence de deux vecteurs

Exemple(s)

1) Tracer $\vec{u} + \vec{v}$ dans les cas suivants (∗) :



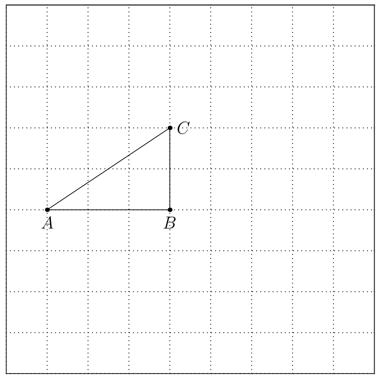
Correction :



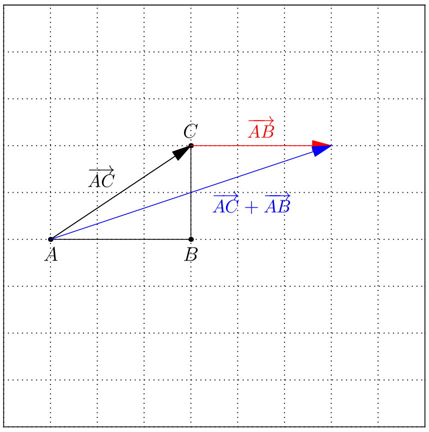
2. Somme et différence de deux vecteurs

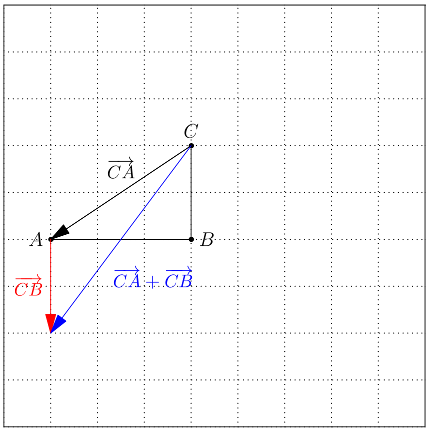
Exemple(s)

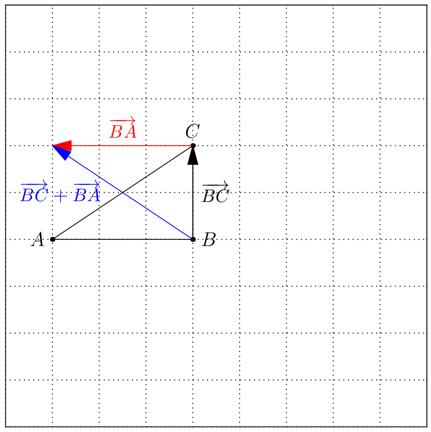
2) Tracer $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$ dans la figure ci-contre (∗) :



Correction :







2. Somme et différence de deux vecteurs

Conséquence de la définition de la somme de deux vecteurs :

Relation de Chasles : Pour tous points A, B et C, on a $\overrightarrow{A\underline{B}}+\overrightarrow{\underline{B}C}=\overrightarrow{AC}$

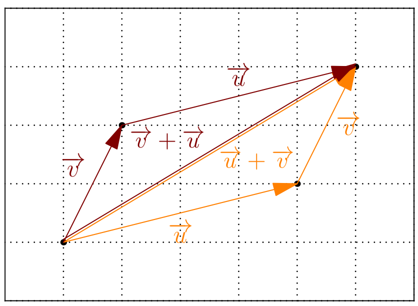
- Remarques :
  - Quand on remplace $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ par $\overrightarrow{AC}$, on dit qu'on *simplifie* l'expression.
  - Quand on remplace $\overrightarrow{AC}$ par $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, on dit qu'on *décompose* le vecteur $\overrightarrow{AC}$ en passant par le point B .

Propriété(s)

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a :

$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$.

Démonstration en utilisant un parallélogramme :



2. Somme et différence de deux vecteurs

Propriété(s)

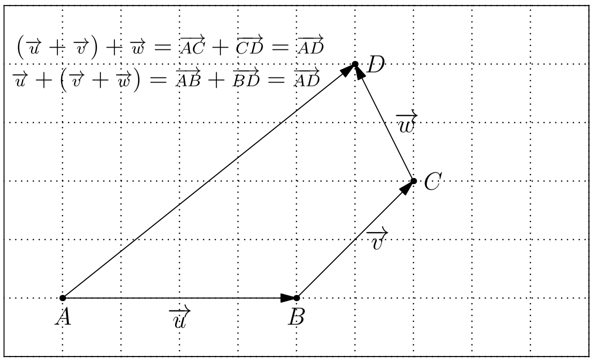
Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *, on a :*

$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

(on peut donc s'abstenir d'utiliser des parenthèses)

Démonstration :

Soit A *un point du plan,* B*,* C *et* D *les points tels que* $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$ *et* $\overrightarrow{CD}=\vec{w}$



Exemple(s)

Simplifier les expressions suivantes à l'aide de la relation de Chasles :

1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$ - *Réponse :* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$
2. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}$ - *Réponse :* $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$
3. $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{AD}$ - *Réponse :* $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$ $=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$

2. Somme et différence de deux vecteurs

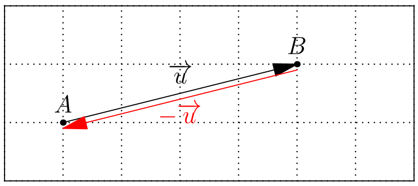
b) Opposé d'un vecteur

Définition

- Étant donné un vecteur non nul $\vec{u}$ de représentant $\overrightarrow{AB}$.

On appelle **opposé** de $\vec{u}$, le vecteur noté $-\vec{u}$ de représentant $\overrightarrow{BA}$.
($-\vec{u}$ a donc même direction et même longueur que $\vec{u}$ mais est de sens contraire)

- Par convention, on pose $-\vec{0}=\vec{0}$.



Conséquences :

$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$ et $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$ (car $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$)

c) Différence de deux vecteurs

Définition

On appelle **différence** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u}-\vec{v}$ égal à $\vec{u}+(-\vec{v})$.

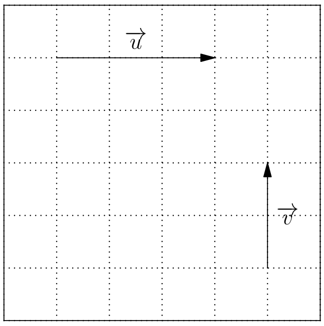
Conséquence :

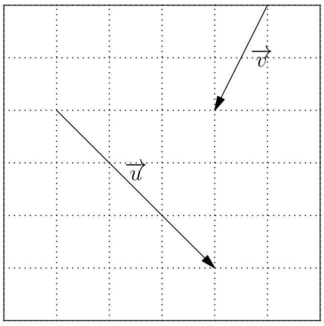
$\vec{u}-\vec{u}=\vec{0}$

2. Somme et différence de deux vecteurs

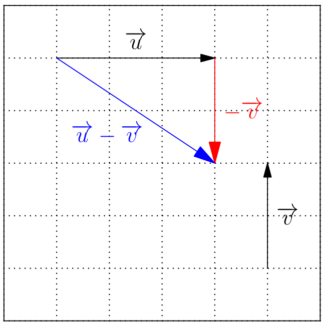
Exemple(s)

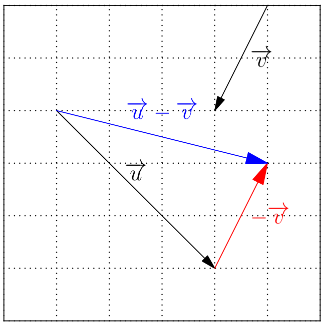
1) Tracer $\vec{u} - \vec{v}$ dans les cas suivants $(*)$:





Correction : on place l'opposé de $\vec{v}$ au bout de $\vec{u}$





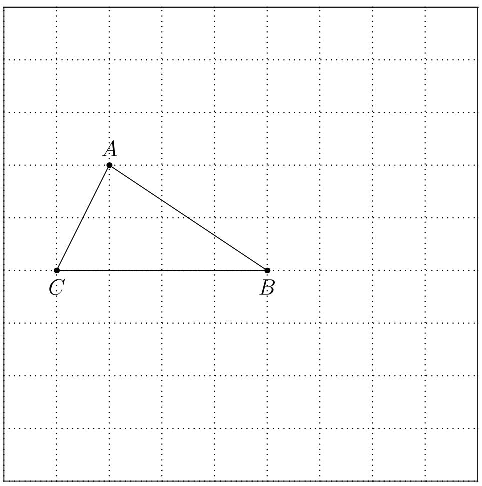
2. Somme et différence de deux vecteurs

Exemple(s)

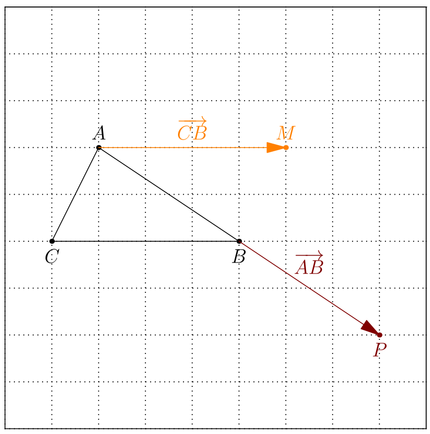
2) Simplifier les expressions suivantes :

1. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ - *Réponse :* $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$
2. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ - *Réponse :* $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC}$
3. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ - *Réponse :* $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}$ $= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

3) Placer les points M et P tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$. $(*)$



Correction :
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow$
$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB}$

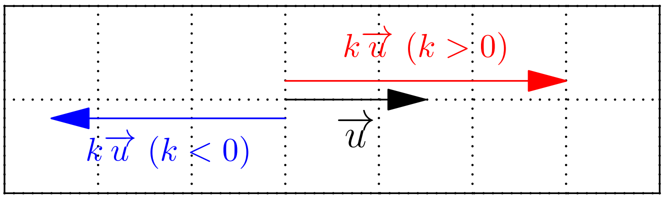


3. Multiplication d'un vecteur par un réel

Définition

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et pour tout réel k, on appelle **produit de $\overrightarrow{u}$ par** k, le vecteur noté $k\overrightarrow{u}$ tel que :

- Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et si $k > 0$ alors $k\overrightarrow{u}$ a même direction et même sens que $\overrightarrow{u}$ et longueur de $(k\overrightarrow{u}) = k \times$ (longueur de $\overrightarrow{u}$).
- Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et si $k < 0$ alors $k\overrightarrow{u}$ a même direction que $\overrightarrow{u}$, est de sens contraire de celui de $\overrightarrow{u}$ et longueur de $(k\overrightarrow{u}) = (-k) \times$ (longueur de $\overrightarrow{u}$).

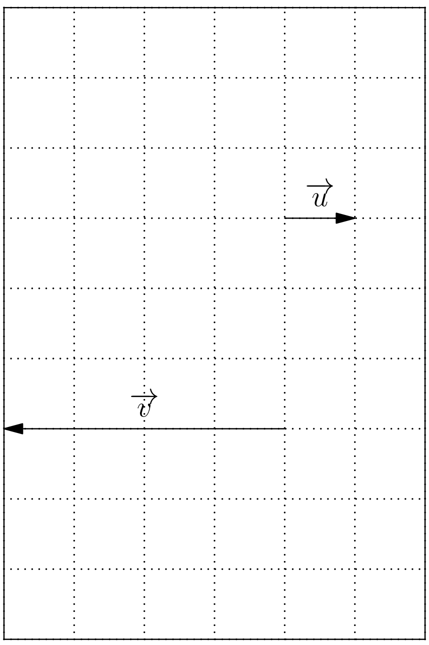


- Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou si $k = 0$, alors $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

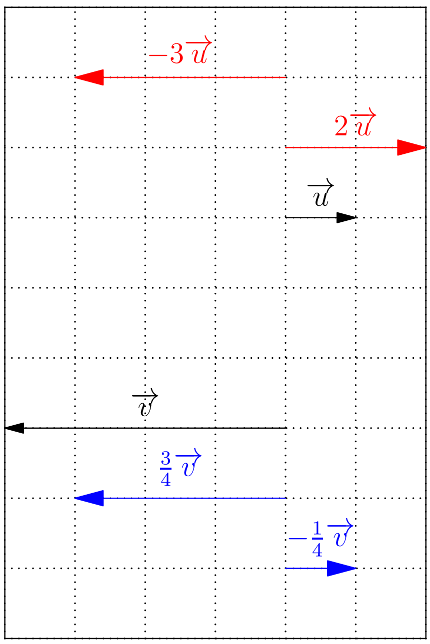
3. Multiplication d'un vecteur par un réel

Exemple(s)

1) Construire $2\overrightarrow{u}$, $-3\overrightarrow{u}$, $\frac{3}{4}\overrightarrow{v}$ et $-\frac{1}{4}\overrightarrow{v}$ dans la figure ci-dessous $(*)$:



Correction :

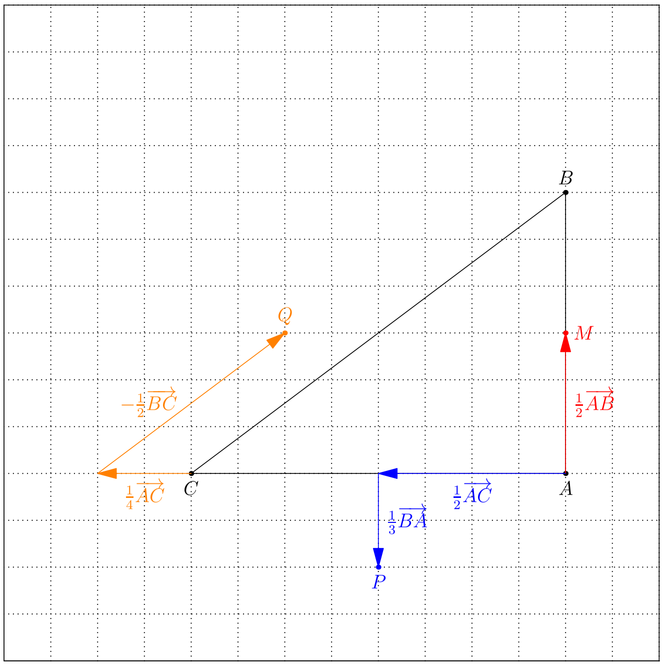


3. Multiplication d'un vecteur par un réel

Exemple(s)

2) Dans la figure ci-contre $(*)$:

- Pour placer le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, on a construit $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ en partant de A.
- Pour placer le point P tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$, on a construit $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ en partant de A, puis on a placé au bout un représentant de $\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.
- Pour placer le point Q tel que $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, on a construit $\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ en partant de C, puis on a placé au bout un représentant de $-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.



3. Multiplication d'un vecteur par un réel

Propriété(s)

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et pour tous réels k et k' :

- $k\left(k'\overrightarrow{u}\right) = (kk')\overrightarrow{u}$ - *exemple :* $2\left(4\overrightarrow{u}\right) = (2\times 4)\overrightarrow{u} = 8\overrightarrow{u}$
- $k\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$ - *exemple :* $-6\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = -6\overrightarrow{u} - 6\overrightarrow{v}$
- $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$ - *exemple :* $2\overrightarrow{u} - \frac{1}{2}\overrightarrow{u} = \left(2 - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{u} = \frac{3}{2}\overrightarrow{u}$

Exemple(s)

Simplifier les expressions suivantes :

- $\frac{1}{2}\overrightarrow{u} - \frac{1}{3}\overrightarrow{u} = \frac{1}{2}\times\frac{3}{3}\overrightarrow{u} - \frac{1}{3}\times\frac{2}{2}\overrightarrow{u} = \frac{3}{6}\overrightarrow{u} - \frac{2}{6}\overrightarrow{u} = \frac{1}{6}\overrightarrow{u}$
- $3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} - 2\left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right) = 2\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$
- $3\left(2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right) - 2\left(3\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v}\right) = 6\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v} - 6\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = -4\overrightarrow{v}$

4. Vecteurs colinéaires - Droites parallèles - Points alignés

Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.

▶ **Remarque :** Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Donc le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

Propriété(s)

Dire que deux vecteurs non nuls ont même direction équivaut à dire qu'ils sont colinéaires.

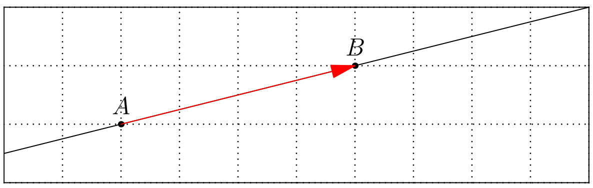
En effet :

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont la même direction alors on a $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ avec $k = \frac{\text{longueur de } \overrightarrow{u}}{\text{longueur de } \overrightarrow{v}}$ s'ils sont de même sens et avec $k = -\frac{\text{longueur de } \overrightarrow{u}}{\text{longueur de } \overrightarrow{v}}$ s'ils sont de sens contraire. Ils sont donc bien colinéaires.
- Et si on a $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ alors ils sont, par définition de la multiplication d'un vecteur par un réel, de même direction.

4. Vecteurs colinéaires - Droites parallèles - Points alignés

Définition

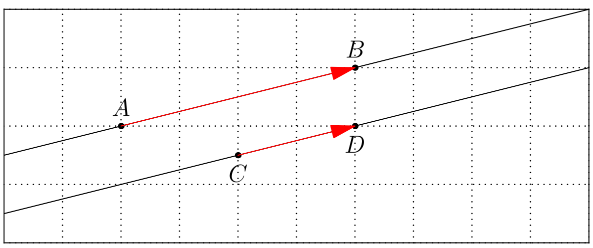
On appelle **vecteur directeur** d'une droite tout vecteur formé par deux points distincts de la droite. *(c'est un vecteur qui « indique » la direction de la droite)*



Propriété(s)

Dire que deux droites sont parallèles équivaut à dire qu'elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

▶ **Application :** Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles équivaut à montrer qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.



4. Vecteurs colinéaires - Droites parallèles - Points alignés

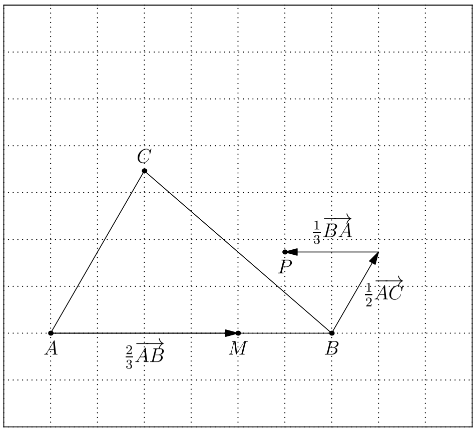
Exemple(s)

Dans la figure ci-contre (∗) :

1. Placer les points M et P tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.
2. Montrer que les droites (MP) et (AC) sont parallèles.
   Réponse : on va montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Pour cela, on cherche à décomposer $\overrightarrow{MP}$ avec la relation de Chasles en passant par les points avec lesquels M et P sont définis dans l'énoncé. M est donné dans l'énoncé avec A et P est donné avec B, d'où la décomposition que l'on va utiliser :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}\\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires car on a montré qu'il existait un réel k tel que $\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{AC}$. Ce qui prouve que les droites (MP) et (AC) sont parallèles.



4. Vecteurs colinéaires - Droites parallèles - Points alignés

Propriété(s)

Si les vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires alors on peut en déduire que les points A, B et C sont alignés (puisque cela implique que les droites (AB) et (AC) sont parallèles).

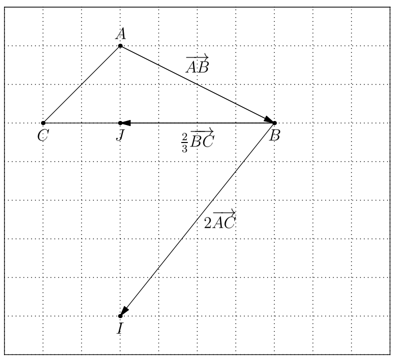
Exemple(s)

Dans la figure ci-contre (∗) :

1. Placer les points I et J tels que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
2. Montrer que les points A, I et J sont alignés.
   Réponse : on va montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires. Pour cela, on cherche à décomposer $\overrightarrow{AJ}$ avec la relation de Chasles en passant par le point B avec lequel J est défini dans l'énoncé :

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$
$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires car on a montré qu'il existait un réel k tel que $\overrightarrow{AJ} = k\overrightarrow{AI}$. Ce qui prouve que les les points A, I et J sont alignés.



Fin du chapitre

xm1math.net