

Pourcentages - Seconde

©Pascal Brachet (CC BY NC SA)

<https://www.xm1math.net>

1. Pourcentage d'une grandeur

La proportion, exprimée en pourcentage, d'une grandeur A par rapport à une grandeur B se retrouve en effectuant le calcul $\frac{A}{B} \times 100$.

Exemple(s)

- Quel pourcentage représentent 18 élèves par rapport à un total de 120 élèves ?

Réponse : 15% car $\frac{18}{120} \times 100 = 15$.

- Quel pourcentage représentent 2,10 euros par rapport à une somme totale de 700 euros ?

Réponse : 0,3% car $\frac{2,1}{700} \times 100 = 0,3$.

Prendre $x\%$ d'une grandeur revient à la multiplier par $\frac{x}{100}$.

Exemple(s)

- Quelle somme représente 5% de 640 euros ?

Réponse : 32 euros car $\frac{5}{100} \times 640 = 32$

1. Pourcentage d'une grandeur

Exemple(s)

- Quelle somme représente 0,45% de 15 000 euros ?

Réponse : 67,5 euros car $\frac{0,45}{100} \times 15\,000 = 67,5$.

- 384 élèves d'un lycée font de l'espagnol ce qui représente 32% du nombre total d'élèves dans le lycée. Combien y a-t-il d'élèves dans le lycée ?

Réponse : Cela revient à chercher x tel que $\frac{32}{100} \times x = 384$. On en déduit que

$$x = \frac{384}{\frac{32}{100}} = \frac{384 \times 100}{32} = 1200. \text{ Le lycée comporte } 1\,200 \text{ élèves.}$$

Prendre $x\%$ de $y\%$ d'une grandeur revient à prendre directement $\frac{x \times y}{100}\%$ de cette grandeur.

Cela vient du fait que $\frac{x}{100} \times \frac{y}{100} \times 100 = \frac{x \times y}{100}$

Exemple(s)

- Quel pourcentage global des revenus est ponctionné si on prélève une taxe de 20% sur 80% des revenus ?

Réponse : 16% car $\frac{20 \times 80}{100} = 16$.

2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

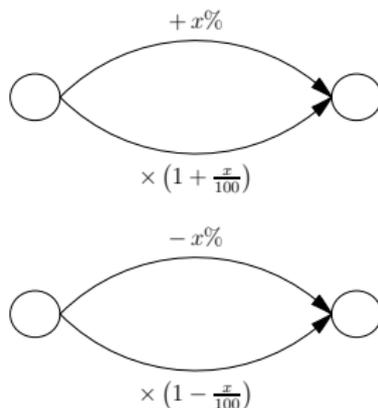
a) Principe général

- Si on augmente une grandeur A de $x\%$, on obtient $A + \frac{x}{100} A = (1 + \frac{x}{100}) A$.
- Si on diminue une grandeur A de $x\%$, on obtient $A - \frac{x}{100} A = (1 - \frac{x}{100}) A$.

Propriété(s)

- Augmenter une grandeur de $x\%$ revient à la multiplier par $(1 + \frac{x}{100})$.
 $(1 + \frac{x}{100})$ est alors appelé **coefficient multiplicateur** associé à la hausse.
- Diminuer une grandeur de $x\%$ revient à la multiplier par $(1 - \frac{x}{100})$.
 $(1 - \frac{x}{100})$ est alors appelé **coefficient multiplicateur** associé à la baisse.

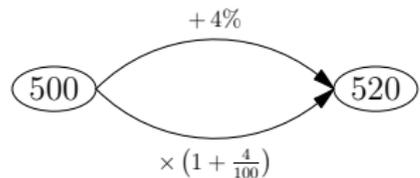
Représentation schématique :



2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

Exemple(s)

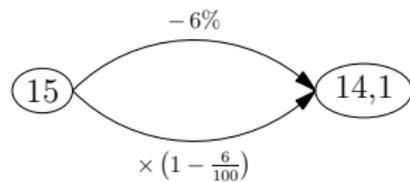
- ①
 - Augmenter une grandeur de 3% revient à la multiplier par $(1 + \frac{3}{100}) = 1,03$
 - Augmenter une grandeur de 12,5% revient à la multiplier par $(1 + \frac{12,5}{100}) = 1,125$
 - Augmenter une grandeur de 100% revient à la multiplier par $(1 + \frac{100}{100}) = 2$
- ②
 - Diminuer une grandeur de 15% revient à la multiplier par $(1 - \frac{15}{100}) = 0,85$
 - Diminuer une grandeur de 7,5% revient à la multiplier par $(1 - \frac{7,5}{100}) = 0,925$
 - Diminuer une grandeur de 50% revient à la multiplier par $(1 - \frac{50}{100}) = 0,5$
- ③ Si le prix d'un produit valant 500 euros subit une hausse de 4%, son nouveau prix est de $500 \times 1,04 = 520$ euros.



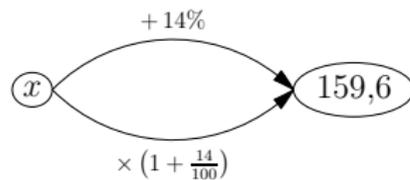
2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

Exemple(s)

- ④ Si une action valant 15 euros subit une baisse de 6%, sa nouvelle valeur est de $15 \times 0,94 = 14,1$ euros.



- ⑤ Le prix d'un produit est de 159,6 euros après avoir subi une hausse de 14%. Le prix du produit avant la hausse était x tel que $x \times 1,14 = 159,6$. On obtient $x = \frac{159,6}{1,14} = 140$.



2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

b) Retrouver un pourcentage d'évolution à partir du coefficient multiplicateur

Multiplier une grandeur par un coefficient t revient à lui appliquer une évolution en pourcentage (positive ou négative) de $(t - 1) \times 100$.

Exemple(s)

- ➊ Multiplier une grandeur par 1,15 revient à lui appliquer une hausse de 15% car $(1,15 - 1) \times 100 = 15$.
- ➋ Multiplier une grandeur par 1,04 revient à lui appliquer une hausse de 4% car $(1,04 - 1) \times 100 = 4$.
- ➌ Multiplier une grandeur par 0,9 revient à lui appliquer une baisse de 10% car $(0,9 - 1) \times 100 = -10$.
- ➍ Multiplier une grandeur par 0,72 revient à lui appliquer une baisse de 28% car $(0,72 - 1) \times 100 = -28$.

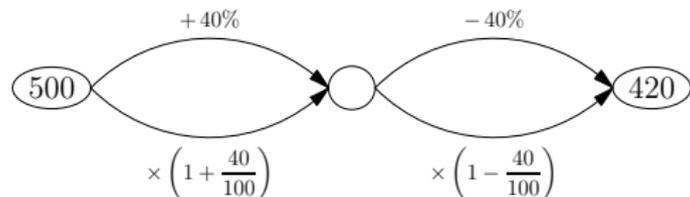
c) Application aux variations successives

Principe : Lors d'augmentations et/ou de baisses successives, les coefficients multiplicateurs se multiplient mais les pourcentages ne s'ajoutent pas.

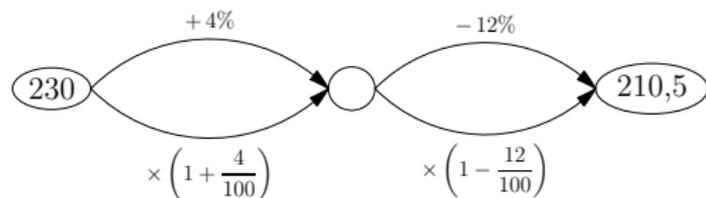
2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

Exemple(s)

- ① Si le prix d'un produit valant 500 euros subit une hausse de 40% suivie d'une baisse de 40%, son nouveau prix est de 420 euros car $500 \times 1,4 \times 0,6 = 420$.



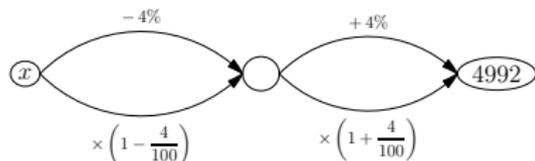
- ② Si le prix d'un produit valant 230 euros subit une hausse de 4% suivie d'une baisse de 12%, son nouveau prix est de 210,5 euros car $230 \times 1,04 \times 0,88 \approx 210,5$.



2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

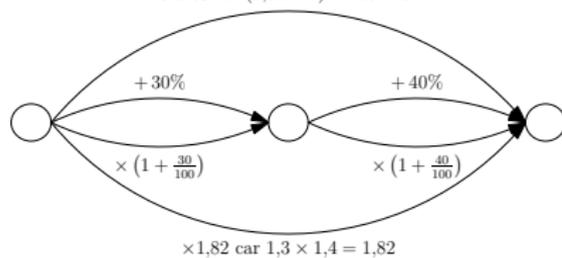
Exemple(s)

- ③ Le prix d'un produit est de 4992 euros après avoir subi une baisse de 4%, suivie d'une hausse de 4%. Le prix initial du produit était x tel que $x \times 0,96 \times 1,04 = 4992$. On obtient $x = \frac{4992}{0,96 \times 1,04} = 5000$.



- ④ Faire subir à une grandeur une hausse de 30% suivie d'une autre hausse de 40% revient à lui appliquer directement une hausse en pourcentage de 82% car le coefficient multiplicateur global est de $1,3 \times 1,4 = 1,82$ et que $(1,82 - 1) \times 100 = 82$.

+82% car $(1,82 - 1) \times 100 = 82$

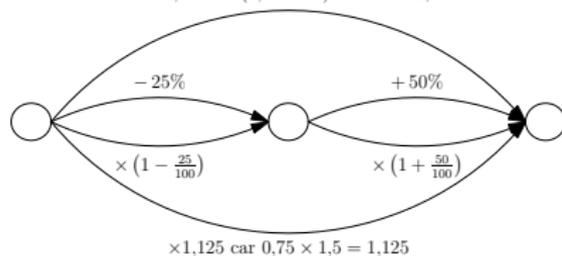


2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

Exemple(s)

- 5 Faire subir à une grandeur une baisse de 25% suivie d'une hausse de 50% revient à lui appliquer directement une hausse en pourcentage de 12,5% car le coefficient multiplicateur global est de $0,75 \times 1,5 = 1,125$ et que $(1,125 - 1) \times 100 = 12,5$.

$$+12,5\% \text{ car } (1,125 - 1) \times 100 = 12,5$$



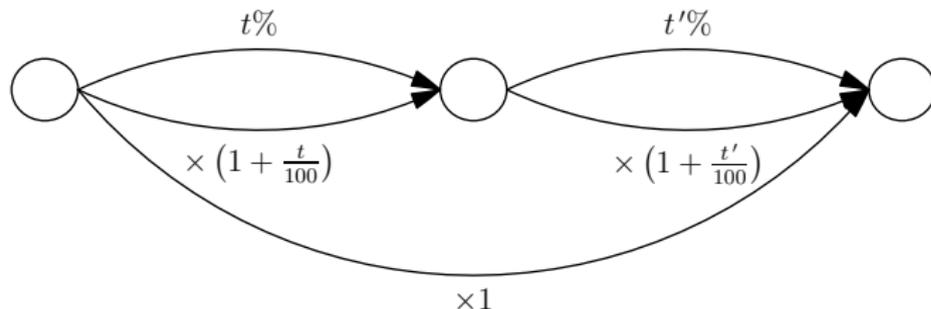
- 6 Un capital augmentant de 3,5% par an pendant 10 ans a subi une hausse globale en pourcentage sur ces 10 ans d'environ 41% car le coefficient multiplicateur global est de $1,035 \times 1,035 \times \dots \times 1,035 = 1,035^{10} \approx 1,41$ et que $(1,41 - 1) \times 100 = 41$.

10 fois

2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

d) Taux d'évolution réciproque

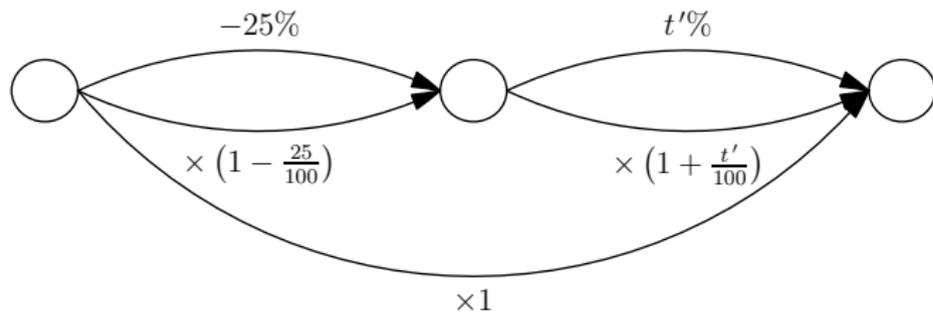
Si une grandeur subit une évolution de $t\%$, on appelle taux d'évolution réciproque de cette évolution, le taux t' tel que $(1 + \frac{t}{100}) \times (1 + \frac{t'}{100}) = 1$, c'est à dire le taux d'évolution qui permet « d'annuler » l'évolution de $t\%$ en rendant le coefficient multiplicateur global égal à 1.



2. Expression en pourcentage d'une augmentation et d'une diminution

Exemple(s)

Déterminer le taux d'évolution réciproque d'une baisse de 25% revient à déterminer t' tel que $(1 - \frac{25}{100}) \times (1 + \frac{t'}{100}) = 1$:



Détermination de t' : $(1 - \frac{25}{100}) \times (1 + \frac{t'}{100}) = 1 \Leftrightarrow 0,75 \times (1 + \frac{t'}{100}) = 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{t'}{100} = \frac{1}{0,75}$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{t'}{100} \approx 1,333 \Leftrightarrow \frac{t'}{100} \approx 0,333 \Leftrightarrow t' \approx 33,3$.

Autrement dit, il faut une hausse de 33,3% pour « annuler » une baisse de 25%.

3. Variations d'une grandeur

Définition

Étant donné une grandeur passant de la valeur initiale A à la valeur finale B , on dit que :

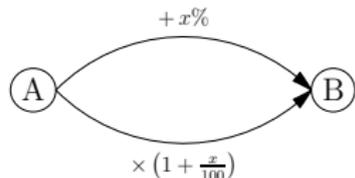
- cette grandeur a subi une **variation absolue** égale à $B - A$;
- cette grandeur a subi une **variation relative** égale à $\frac{B - A}{A}$;

Propriété(s)

L'évolution en pourcentage qu'a subi cette grandeur se retrouve en effectuant le calcul :

$$\frac{B - A}{A} \times 100 = \frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} \times 100.$$

En effet :



$$A \times \left(1 + \frac{x}{100}\right) = B \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{100} = \frac{B}{A} \Leftrightarrow \frac{x}{100} = \frac{B}{A} - 1 \Leftrightarrow \frac{x}{100} = \frac{B - A}{A} \Leftrightarrow x = \frac{B - A}{A} \times 100$$

3. Variations d'une grandeur

Exemple(s)

- ① Lorsque le prix d'un produit passe de 64 à 72 euros :
 - la variation absolue du prix est égale à $72 - 64 = 8$ euros ;
 - la variation relative du prix est égale à $\frac{72 - 64}{64} = 0,125$;
 - l'évolution en pourcentage du prix est de $+12,5\%$ car $\frac{72 - 64}{64} \times 100 = 12,5$.
- ② La valeur d'une action passant de 13,4 à 11,7 euros a subi une baisse en pourcentage d'environ $12,7\%$ car $\frac{11,7 - 13,4}{13,4} \times 100 \approx -12,7$.

Fin du chapitre