Inéquations - Seconde

https://www.xm1math.net

xm1math.net

1. Inéquations du 1er degré à une inconnue

Définition

Ce sont des inéquations de la forme $ax+b \geqslant 0$, $ax+b > 0$, $ax+b \leqslant 0$ ou $ax+b < 0$ (avec $a \neq 0$).
Résoudre ces inéquations dans $\mathbb{R}$, c'est déterminer l'ensemble S (sous la forme d'un intervalle) des réels x vérifiant la relation.

Exemple(s)

- $2x-3 \leqslant 0 \Leftrightarrow 2x \leqslant 3 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{3}{2}$. $S = \left]-\infty\,;\, \frac{3}{2}\right]$.
- $-2x+5 \leqslant 0 \Leftrightarrow 5 \leqslant 2x \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leqslant x$. $S = \left[\frac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$
- $-3x+4 < 0 \Leftrightarrow 4 < 3x \Leftrightarrow \frac{4}{3} < x$. $S = \left]\frac{4}{3}\,;\,+\infty\right[$

Remarque(s)

Si $a > 0$:
$ax+b \geqslant 0 \Leftrightarrow ax \geqslant -b \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{b}{a}$.
$ax+b \leqslant 0 \Leftrightarrow ax \leqslant -b \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{b}{a}$.
On a donc la situation suivante :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de $ax+b$	$-$	0	$+$

Si $a < 0$:
$ax+b \geqslant 0 \Leftrightarrow ax \geqslant -b \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{b}{a}$.
$ax+b \leqslant 0 \Leftrightarrow ax \leqslant -b \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{b}{a}$.
On a donc la situation suivante :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de $ax+b$	$+$	0	$-$

1. Inéquations du 1er degré à une inconnue

Propriété(s)

Le signe de $ax+b$ (avec $a \neq 0$) suivant les valeurs de x est donné par le tableau :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
signe de $ax+b$		signe de $-a$	0	signe de a	

(Le tableau peut se résumer avec la règle suivante : signe du coefficient devant x après le « 0 »)

Exemple(s)

Signe de $4x-8$:
$4x-8=0 \Leftrightarrow 4x=8 \Leftrightarrow x=2$
Signe du coefficient devant x (ici 4, donc « + ») après le « 0 » :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
signe de $4x-8$		$-$	0	$+$	

Signe de $9-3x$:
$9-3x=0 \Leftrightarrow 9=3x \Leftrightarrow x=3$
Signe du coefficient devant x (ici -3, donc « - ») après le « 0 » :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $9-3x$		$+$	0	$-$	

xm1math.net

2. Signe d'un produit d'expressions du 1er degré

Principe

1. Dans un tableau (dit « tableau de signes »), on inscrit une ligne pour chaque facteur du produit et une ligne finale pour le produit ;
2. On détermine les valeurs de x qui annulent chaque facteur ;
3. On applique la règle « signe du coefficient devant x après le 0 » pour chaque facteur du produit ;
4. On applique la règle des signes pour déterminer les signes du produit dans la dernière ligne en insérant un « 0 » pour chaque valeur de x annulant un des facteurs.

Exemple(s)

Signe de $(2x - 4)(1 - 3x)$:

- $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{2} = 2$
  $1 - 3x = 0 \Leftrightarrow 1 = 3x \Leftrightarrow \frac{1}{3} = x$
- Pour $2x - 4$:
  « signe du coefficient devant x
  (ici 2, donc $+$) après le 0 » ;
  Pour $1 - 3x$:
  « signe du coefficient devant x
  (ici -3, donc -) après le 0 ».
- Pour le produit, on applique la règle des signes.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
signe de $2x - 4$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $1 - 3x$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $(2x - 4)(1 - 3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. Signe d'un produit d'expressions du 1er degré

Exemple(s)

Signe de $2x(x+3)(1-x)$:

- $2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{2} = 0$
  $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$
  $1 - x = 0 \Leftrightarrow 1 = x$
- Pour $2x$:
  « signe du coefficient devant x (ici 2, donc $+$) après le 0 » ;
  Pour $x+3$:
  « signe du coefficient devant x (ici 1, donc $+$) après le 0 » ;
  Pour $1-x$:
  « signe du coefficient devant x (ici -1, donc -) après le 0 ».
- Pour le produit, on applique la règle des signes.

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
signe de $2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $2x(x+3)(1-x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

3. Signe d'un quotient d'expressions du 1^{er} degré

Principe

1. Dans un tableau (dit « tableau de signes »), on inscrit une ligne pour chaque facteur du quotient et une ligne finale pour le quotient ;
2. On détermine les valeurs de x qui annulent chaque facteur ;
3. On applique la règle « signe du coefficient devant x après le 0 » pour chaque facteur du quotient ;
4. On applique la règle des signes pour déterminer les signes du quotient dans la dernière ligne en insérant un « 0 » pour chaque valeur de x annulant le numérateur et une « double barre » pour chaque valeur de x annulant le dénominateur (pour indiquer la présence d'une valeur interdite)

Exemple(s)

Signe de $\dfrac{1-x}{2x+3}$:

- $1-x=0 \Leftrightarrow 1=x$
  $2x+3=0 \Leftrightarrow 2x=-3 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$
- Pour $1-x$:
  « signe du coefficient devant x
  (ici -1, donc -) après le 0 » ;
  Pour $2x+3$:
  « signe du coefficient devant x
  (ici 2, donc $+$) après le 0 ».
- Pour le quotient, on applique la règle des signes et on ajoute une « double barre » pour $x=-\frac{3}{2}$ qui annule le dénominateur.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
signe de $1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\frac{1-x}{2x+3}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

3. Signe d'un quotient d'expressions du 1er degré

Exemple(s)

Signe de $\dfrac{-x}{(3x-6)(x+2)}$:

- $-x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{3} = 2$
  $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
- Pour $-x$:
  « signe du coefficient devant x (ici -1, donc -) après le 0 » ;
  Pour $3x - 6$:
  « signe du coefficient devant x (ici 3, donc +) après le 0 » ;
  Pour $x + 2$:
  « signe du coefficient devant x (ici 1, donc +) après le 0 ».
- Pour le quotient, on applique la règle des signes et on ajoute une « double barre » pour $x = -2$ et $x = 2$ qui annulent le dénominateur.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
signe de $-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
signe de $3x-6$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
signe de $x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
signe de $\frac{-x}{(3x-6)(x+2)}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

4. Inéquations se ramenant au 1er degré

a) Inéquations ne nécessitant pas de tableaux de signes

Exemple(s)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x+3<3x-4$:

$$\begin{aligned} 2x+3<3x-4 &\Leftrightarrow 2x-3x<-4-3 \text{ (tous les termes en } x \text{ d'un côté, le reste de l'autre)} \\ &\Leftrightarrow -x<-7 \\ &\Leftrightarrow x>7 \text{ (en divisant par } -1 \text{ il faut changer le sens de l'inégalité)} \end{aligned}$$

$S =]7\,;+\infty[$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x-\frac{1}{2}<4(x+1)$:

$$\begin{aligned} x-\tfrac{1}{2} \geqslant 4(x+1) &\Leftrightarrow x-\tfrac{1}{2} \geqslant 4x+4 \\ &\Leftrightarrow x-4x \geqslant 4+\tfrac{1}{2} \text{ (tous les termes en } x \text{ d'un côté, le reste de l'autre)} \\ &\Leftrightarrow -3x \geqslant \tfrac{9}{2} \\ &\Leftrightarrow x \leqslant \frac{\frac{9}{2}}{-3} \text{ (en divisant par } -3 \text{ il faut changer le sens de l'inégalité)} \\ &\Leftrightarrow x \leqslant -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$S = \left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right]$

4. Inéquations se ramenant au 1er degré

b) Inéquations qui nécessitent un tableau de signes

Principe général

1. Se ramener à 0 ;
2. Écrire l'expression restante sous la forme d'un produit ou d'un quotient d'expressions du 1er degré (en factorisant, en réduisant au même dénominateur, ... si nécessaire)
3. Construire le tableau de signes correspondant ;
4. Déterminer l'ensemble des solutions S en repérant les valeurs de x pour lesquelles on trouve dans dernière ligne du tableau :
    - le signe « $+$ » pour une situation du type « $\cdots > 0$ » ;
    - le signe « $+$ » et les « 0 » pour une situation du type « $\cdots \geqslant 0$ » ;
    - le signe « $-$ » pour une situation du type « $\cdots < 0$ » ;
    - le signe « $-$ » et les « 0 » pour une situation du type « $\cdots \leqslant 0$ ».

Remarque : toute borne correspondante à une double-barre, à $-\infty$ ou à $+\infty$ doit être ouverte, toute borne correspondante à un « 0 » doit être fermée.

4. Inéquations se ramenant au 1er degré

Exemple(s)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(x+1)(x-2) \leqslant 0$.
On est déjà ramené à 0 et on a déjà un produit d'expressions du 1er degré : il ne reste plus qu'à construire le tableau de signes correspondant en entourant, dans la dernière ligne, les « - » et les « 0 » car on a une situation du type « $\cdots \leqslant 0$ ».

x	$-\infty$		-1	$\longleftrightarrow$	2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les valeurs de x pour lesquelles on a « - » ou « 0 » dans la dernière ligne nous donne $S = [-1\,;\,2]$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(1-2x)(x-1) < 0$.
On est déjà ramené à 0 et on a déjà un produit d'expressions du 1er degré : il ne reste plus qu'à construire le tableau de signes correspondant en entourant, dans la dernière ligne, les « - » car on a une situation du type « $\cdots < 0$ ».

x	$-\infty$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}$		1	$\longleftrightarrow$	$+\infty$
$1-2x$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(1-2x)(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Les valeurs de x pour lesquelles on a « - » dans la dernière ligne nous donne $S = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[\cup]1\,;\,+\infty[$.

4. Inéquations se ramenant au 1er degré

Exemple(s)

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4x > x^2$.
On se ramène à 0 et on factorise : $4x > x^2 \Leftrightarrow 4x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(4-x) > 0$
Il ne reste plus qu'à construire le tableau de signes correspondant en entourant, dans la dernière ligne, les « + » car on a une situation du type « $\cdots > 0$ ».

x	$-\infty$		0	$\longleftrightarrow$	4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	
$4-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x(4-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Les valeurs de x pour lesquelles on a « + » dans la dernière ligne nous donne $S =]0\,;\,4[$.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{x-3}{x+4} \geqslant 0$.
On est déjà ramené à 0 et on a déjà un quotient d'expressions du 1er degré : il ne reste plus qu'à construire le tableau de signes correspondant en entourant, dans la dernière ligne, les « + » et les « 0 » car on a une situation du type « $\cdots \geqslant 0$ ».

x	$-\infty$	$\longleftrightarrow$	-4		3	$\longleftrightarrow$	$+\infty$
$x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{x-3}{x+4}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Les valeurs de x pour lesquelles on a « + » ou « 0 » dans la dernière ligne nous donne
$S =]-\infty\,;\,-4[\cup [3\,;\,+\infty[$.

4. Inéquations se ramenant au 1er degré

Exemple(s)

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{x+1}{x-2} > 4$.
On se ramène à 0 et on réduit au même dénominateur :
$\frac{x+1}{x-2} > 4 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} - 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} - 4 \times \frac{x-2}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-4x+8}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+9}{x-2} > 0$
Il ne reste plus qu'à construire le tableau de signes correspondant en entourant, dans la dernière ligne, les « + » car on a une situation du type « $\cdots > 0$ ».

x	$-\infty$		2	$\longleftrightarrow$	3		$+\infty$
$-3x+9$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{-3x+9}{x-2}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

Les valeurs de x pour lesquelles on a « + » dans la dernière ligne nous donne $S =]2\,;\,3[$.

4. Inéquations se ramenant au 1er degré

Exemple(s)

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{x^2-4}{x+5} \leqslant 0$.

On est déjà ramené à 0, mais reste à factoriser le numérateur : $\frac{x^2-4}{x+5} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+2)}{x+5} \leqslant 0$.
Il ne reste plus qu'à construire le tableau de signes correspondant en entourant, dans la dernière ligne, les « - » et les « 0 » car on a une situation du type « $\cdots \leqslant 0$ ».

x	$-\infty$ $\longleftrightarrow$	-5		-2	$\longleftrightarrow$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+5$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$\frac{(x-2)(x+2)}{x+5}$	-	‖	$+$	0	-	0	$+$

Les valeurs de x pour lesquelles on a « $+$ » ou « 0 » dans la dernière ligne nous donne $S =]-\infty\,;\,-5[\,\cup\,[-2\,;\,2]$.

Fin du chapitre