Inégalités - Seconde

https://www.xm1math.net

1. Ordre sur $\mathbb{R}$

Définition

Pour tous réels x et y, dire que x **est inférieur ou égal à** y signifie que $(y - x)$ est positif.
Notation : $x \leqslant y$.

Remarque(s)

- On dit que x est **strictement inférieur à** y lorsque $(y - x)$ est strictement positif.
  Notation : $x < y$
- Si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ alors on a $x \leqslant z$.
- Si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ alors on a $x = y$.
- Si $a \leqslant x$ et $x \leqslant b$ alors on peut écrire que $a \leqslant x \leqslant b$
  (on dit qu'on a un encadrement de x).

2. Opérations sur les inégalités

Règle 1

Si on ajoute, ou retranche, un même réel aux deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de même sens : $x \leqslant y \Leftrightarrow x + a \leqslant y + a$

Exemple(s)

1) $x \leqslant 4 \overset{+2}{\Leftrightarrow} x + 2 \leqslant 4 + 2 \Leftrightarrow x + 2 \leqslant 6$

2) $x \leqslant -5 \overset{-4}{\Leftrightarrow} x - 4 \leqslant -5 - 4 \Leftrightarrow x - 4 \leqslant -9$

3) $x - 3 \leqslant 7 \overset{+3}{\Leftrightarrow} x \leqslant 7 + 3 \Leftrightarrow x \leqslant 10$

4) $x + 6 \leqslant 1 \overset{-6}{\Leftrightarrow} x \leqslant 1 - 6 \Leftrightarrow x \leqslant -5$

xm1math.net

2. Opérations sur les inégalités

Règle 2

Si on ajoute membre à membre deux inégalités de même sens on obtient une inégalité de même sens : Si $x \leqslant y$ et $x' \leqslant y'$ alors $x + x' \leqslant y + y'$

Exemple(s)

1) Si $x \leqslant -1$ et $x' \leqslant \frac{1}{2}$ alors $x + x' \leqslant -1 + \frac{1}{2}$. Ce qui donne $x + x' \leqslant -\frac{1}{2}$.

2) Si $\frac{3}{4} \leqslant x$ et $-2 \leqslant x'$ alors $\frac{3}{4} - 2 \leqslant x + x'$. Ce qui donne $-\frac{5}{4} \leqslant x + x'$.

Attention !

Ne jamais soustraire membre à membre deux inégalités.
(contre-exemple : on a bien $5 \leqslant 7$ et $4 \leqslant 9$ mais $(5 - 4)$ n'est pas inférieur à $(7 - 9)$)

xm1math.net

2. Opérations sur les inégalités

Règle 3

Si on multiplie, ou divise, par un même réel **strictement positif** les deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de **même sens** : Pour tout $k > 0$, $x \leqslant y \Leftrightarrow kx \leqslant ky$

Exemple(s)

1) $x \leqslant 2 \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 2x \leqslant 2 \times 2 \Leftrightarrow 2x \leqslant 4$

2) $x \leqslant -3 \overset{\times \frac{2}{3}}{\Leftrightarrow} \frac{2}{3}x \leqslant \frac{2}{3} \times (-3) \Leftrightarrow \frac{2}{3}x \leqslant -2$

3) $\dfrac{7}{2} \leqslant x \overset{\times 8}{\Leftrightarrow} 8 \times \frac{7}{2} \leqslant 8x \Leftrightarrow 28 \leqslant 8x$

4) $3x \leqslant -6 \overset{\times \frac{1}{3}}{\Leftrightarrow} x \leqslant \frac{1}{3} \times (-6) \Leftrightarrow x \leqslant -2$

5) $\dfrac{3}{4}x \leqslant 6 \overset{\times \frac{4}{3}}{\Leftrightarrow} x \leqslant \frac{4}{3} \times 6 \Leftrightarrow x \leqslant 8$

6) $\sqrt{3}x \leqslant -2 \overset{\times \frac{1}{\sqrt{3}}}{\Leftrightarrow} x \leqslant \dfrac{-2}{\sqrt{3}}$

2. Opérations sur les inégalités

Règle 4

Si on multiplie, ou divise, par un même réel **strictement négatif** les deux membres d'une inégalité, on obtient une inégalité de **sens contraire** : Pour tout $k < 0$, $x \leqslant y \Leftrightarrow kx \geqslant ky$

Exemple(s)

1) $x \leqslant 5 \overset{\times(-3)}{\Leftrightarrow} -3x \geqslant -3 \times 5 \Leftrightarrow -3x \geqslant -15$

2) $x \leqslant -\frac{8}{3} \overset{\times\left(-\frac{3}{4}\right)}{\Leftrightarrow} -\frac{3}{4}x \geqslant -\frac{3}{4} \times \left(-\frac{8}{3}\right) \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x \geqslant 2$

3) $x \leqslant 3\sqrt{2} \overset{\times(-1)}{\Leftrightarrow} -x \geqslant -3\sqrt{2}$

4) $-2x \leqslant 6 \overset{\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Leftrightarrow} x \geqslant -\frac{1}{2} \times 6 \Leftrightarrow x \geqslant -3$

5) $-x \geqslant \frac{2}{3} \overset{\times(-1)}{\Leftrightarrow} x \leqslant -\frac{2}{3}$

6) $-\frac{9}{8}x \leqslant 18 \overset{\times\left(-\frac{8}{9}\right)}{\Leftrightarrow} x \geqslant -\frac{8}{9} \times 18 \Leftrightarrow x \geqslant -16$

2. Opérations sur les inégalités

Règle 5

Pour tous réels x et y **strictement positifs** :

Si $x \leqslant y$ alors $\begin{cases} x^2 \leqslant y^2 \text{ (même sens)} \\ \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y} \text{ (même sens)} \\ \dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{y} \text{ (sens contraire)} \end{cases}$

Exemple(s)

1) Si $0 < x \leqslant 2$ alors $x^2 \leqslant 4$; $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{2}$ et $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{2}$

2) Si $x \geqslant \dfrac{3}{4}$ alors $x^2 \geqslant \dfrac{9}{16}$; $\sqrt{x} \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{4}{3}$

3. Opérations sur les encadrements

Règle 6

On peut toujours ajouter membre à membre un encadrement :

Si $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ a' \leqslant y \leqslant b' \end{cases}$ alors $a + a' \leqslant x + y \leqslant b + b'$

Exemple(s)

Si $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 5 \leqslant y \leqslant 9 \end{cases}$ alors $-1 + 5 \leqslant x + y \leqslant 3 + 9$. Ce qui donne $4 \leqslant x + y \leqslant 12$

Règle 7

Si tous les nombres sont **positifs**, on peut multiplier membre à membre un encadrement :

Si a et a' sont positifs et si $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ a' \leqslant y \leqslant b' \end{cases}$ alors $aa' \leqslant xy \leqslant bb'$

Exemple(s)

Si $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant \dfrac{3}{2} \\ \sqrt{2} \leqslant y \leqslant 4 \end{cases}$ alors $1 \times \sqrt{2} \leqslant xy \leqslant \dfrac{3}{2} \times 4$. Ce qui donne $\sqrt{2} \leqslant xy \leqslant 6$.

3. Opérations sur les encadrements

Règle 8

Encadrement de l'opposé : Si $a \leqslant x \leqslant b$ alors $-b \leqslant -x \leqslant -a$

Exemple(s)

Si $-6 \leqslant x \leqslant 2$ alors $-2 \leqslant -x \leqslant 6$

Règle 9

Pour tous réels a, x et b **strictement positifs** :

Si $a \leqslant x \leqslant b$ alors $\begin{cases} a^2 \leqslant x^2 \leqslant b^2 \text{ (bornes dans le même ordre)} \\ \sqrt{a} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{b} \text{ (bornes dans le même ordre)} \\ \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{a} \text{ (bornes dans l'ordre contraire)} \end{cases}$

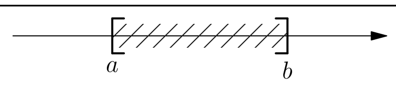
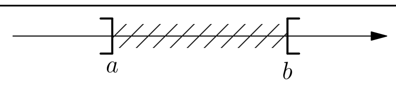
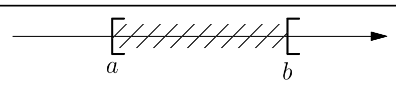
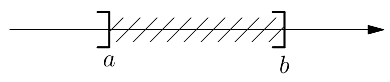
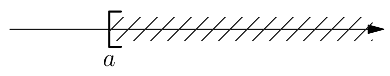
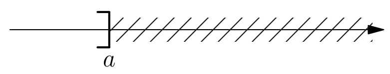
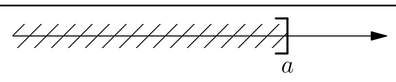
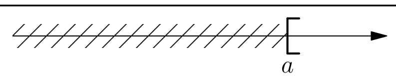
Exemple(s)

Si $2 \leqslant x \leqslant 5$ alors $4 \leqslant x^2 \leqslant 25$; $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{5}$ et $\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{2}$

Attention !

Ne jamais soustraire ou diviser membre à membre deux encadrements.

4. Les intervalles de $\mathbb{R}$

Intervalle	Définition	Schéma sur la droite des réels
$[a\,;\,b]$	tous les x tels que $a \leqslant x \leqslant b$	
$]a\,;\,b[$	tous les x tels que $a < x < b$	
$[a\,;\,b[$	tous les x tels que $a \leqslant x < b$	
$]a\,;\,b]$	tous les x tels que $a < x \leqslant b$	
$[a\,;\,+\infty[$	tous les x tels que $x \geqslant a$	
$]a\,;\,+\infty[$	tous les x tels que $x > a$	
$]-\infty\,;\,a]$	tous les x tels que $x \leqslant a$	
$]-\infty\,;\,a[$	tous les x tels que $x < a$	

si le 1[er] crochet est [la borne inférieure de l'intervalle est dite fermée, sinon elle est dite ouverte.
si le 2[e] crochet est] la borne supérieure de l'intervalle est dite fermée, sinon elle est dite ouverte.

5. Notions de base sur les ensembles

a) Appartenance

Définition

Étant donné un ensemble A, dire qu'un élément x appartient à A s'écrit $x \in A$ et dire que x n'appartient pas à A s'écrit $x \notin A$.

Exemple(s)

$1 \in [0\ ;\ 4]$ et $-2 \notin [0\ ;\ +\infty[$

b) Inclusion

Définition

Si tout élément d'un ensemble A est aussi élément d'un ensemble B, on dit que A est **inclus** dans B et on écrit que $A \subset B$.

Exemple(s)

$[0\ ;\ 1] \subset [-2\ ;\ 4]$ car tout réel de $[0\ ;\ 1]$ est aussi dans $[-2\ ;\ 4]$.

5. Notions de base sur les ensembles

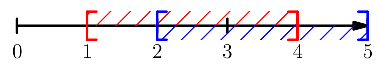
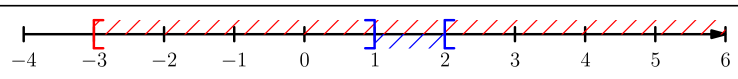
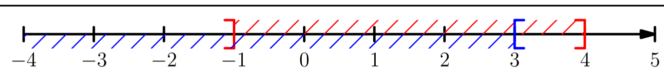
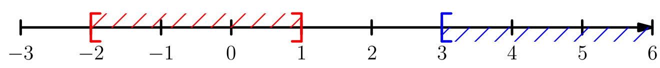
c) Intersection de deux ensembles

Définition

Étant donné deux ensembles A et B, on appelle **intersection** de A et B, l'ensemble des éléments appartenant à A **ET** à B.
L'intersection de A et B se note $A \cap B$ (*« A inter B » oralement)*

Exemple(s)

Pour déterminer l'intersection de deux intervalles, on peut utiliser un schéma avec une couleur différente pour chaque intervalle. L'intersection est composée alors des nombres appartenant aux zones où figurent les deux couleurs en même temps.

$[1\ ;\ 4] \cap [2\ ;\ 5] = [2\ ;\ 4]$	
$[-3\ ;\ +\infty[\cap]1\ ;\ 2[=]1\ ;\ 2[$	
$]-1\ ;\ 4] \cap]-\infty\ ;\ 3[=]-1\ ;\ 3[$	
$[-2\ ;\ 1] \cap [3\ ;\ +\infty[= \varnothing$	

5. Notions de base sur les ensembles

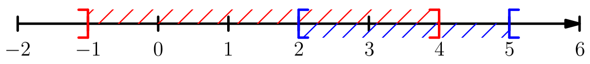
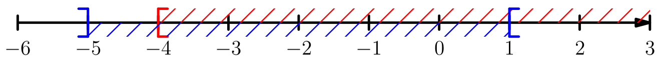
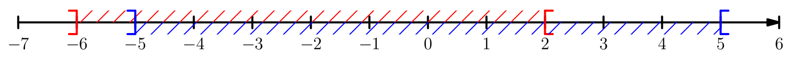
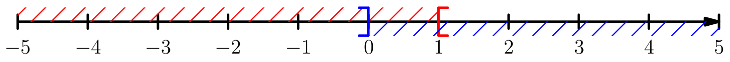
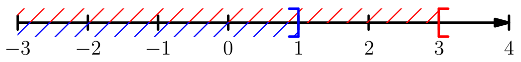
d) Réunion de deux ensembles

Définition

Étant donné deux ensembles A et B, on appelle **réunion** de A et B, l'ensemble des éléments appartenant à A **OU** à B.
La réunion de A et B se note $A \cup B$ (« *A union B* » *oralement*)

Exemple(s)

Pour déterminer l'union de deux intervalles, on peut utiliser un schéma avec une couleur différente pour chaque intervalle. L'union est composée alors des nombres appartenant aux zones où figurent au moins une couleur.

$]-1\,;\,4] \cup [2\,;\,5[=]-1\,;\,5[$	
$[-4\,;\,+\infty[\cup]-5\,;\,1[=]-5\,;\,+\infty[$	
$]-6\,;\,2[\cup]-5\,;\,5[=]-6\,;\,5[$	
$]-\infty\,;\,1[\cup]0\,;\,+\infty[= \mathbb{R}$	
$]-\infty\,;\,3[\cup]-\infty\,;\,1] =]-\infty\,;\,3[$	

6. Méthodes de comparaison de deux expressions

- Comparer deux expressions $A(x)$ et $B(x)$ (dépendantes d'une variable x), c'est déterminer les valeurs de x pour lesquelles on a $A(x) < B(x)$ et celles pour lesquelles on a $A(x) > B(x)$.
- Il est quelquefois plus simple de chercher le signe de la différence $A(x) - B(x)$ plutôt que de procéder avec des inégalités. On se base alors sur le principe suivant :
  - Si $A(x) - B(x)$ est strictement négatif, c'est que $A(x) < B(x)$.
  - Si $A(x) - B(x)$ est strictement positif, c'est que $A(x) > B(x)$.
- Une autre méthode possible si on est sûr que $A(x)$ et $B(x)$ sont strictement positifs est de comparer le quotient $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ à 1 en se basant sur le principe suivant :
  - Si $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ est strictement inférieur à 1, c'est que $A(x) < B(x)$.
  - Si $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ est strictement supérieur à 1, c'est que $A(x) > B(x)$.

Fin du chapitre