Fonctions numériques - Seconde

https://www.xm1math.net

1. Généralités

a) Définition - Image et antécédents

Définition

Étant donné I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$, une fonction numérique f définie sur I est une relation qui à tout x de I associe un **unique** réel, noté $f(x)$ et appelé **image** de x par f.
Notations possibles :

- f est la fonction définie sur I par $f(x) = \cdots$
- $f : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \cdots \end{array}$

Exemple(s)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 3$.

- L'image de 0 par f est $f(0) = 2 \times 0^2 + 3 = 3$ (on remplace x par 0)
- L'image de 1 par f est $f(1) = 2 \times 1^2 + 3 = 5$ (on remplace x par 1)
- Pour tous réels a et b,
  $f(b) - f(a) = \left(2b^2 + 3\right) - \left(2a^2 + 3\right) = 2b^2 + 3 - 2a^2 - 3 = 2b^2 - 2a^2 = 2\left(b^2 - a^2\right)$

1. Généralités

Définition

Étant donné une fonction f définie sur I.
Pour tout réel b, on appelle **antécédents** de b par f, tous les réels x de I (s'ils existent) tels que $f(x) = b$.

Exemple(s)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

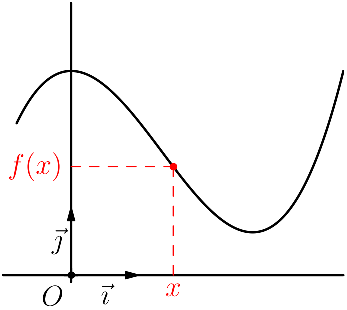
- Recherche des (éventuels) antécédents de 1 par f : ce sont les réels x tels que $f(x) = 1$
  $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  0 est le seul antécédent de 1 par f.
- Recherche des (éventuels) antécédents de 5 par f : ce sont les réels x tels que $f(x) = 5$
  $f(x) = 5 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$
  2 et -2 sont les deux antécédents de 5 par f.
- Recherche des (éventuels) antécédents de 0 par f : ce sont les réels x tels que $f(x) = 0$
  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ (impossible dans $\mathbb{R}$)
  0 n'admet aucun antécédent par f.

1. Généralités

b) Courbe représentative d'une fonction

Définition

Dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on appelle courbe représentative de la fonction f définie sur I, l'ensemble des points **d'abscisse** x **et d'ordonnée** $f(x)$ pour tous les x de I.



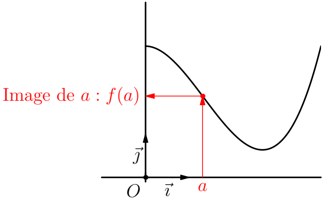
Notation courante : C_f

Une équation cartésienne de la courbe est $y = f(x)$.

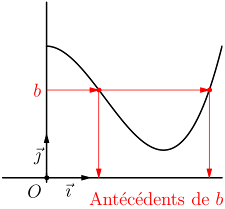
1. Généralités

Conséquences :

- Lecture graphique de l'image d'un réel a par une fonction f :



- Lecture graphique des antécédents d'un réel b par une fonction f :

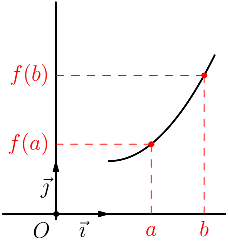


1. Généralités

c) Sens de variation d'une fonction sur un intervalle

Définition

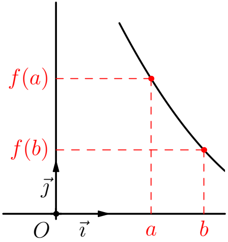
• Une fonction f est dite **croissante** sur un intervalle I si, pour **tous** les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \leqslant f(b)$. *(les images sont rangées dans le même ordre que les nombres de départ)*



Notation dans un tableau de variations :

x	
$f(x)$	↗

• Une fonction f est dite **décroissante** sur un intervalle I si, pour **tous** les réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \geqslant f(b)$. *(les images sont rangées dans l'ordre contraire de celui des nombres de départ)*



Notation dans un tableau de variations :

x	
$f(x)$	↘

1. Généralités

Remarque(s)

- En remplaçant $f(a) \leqslant f(b)$ par $f(a) < f(b)$ dans la définition, on dit alors que f est strictement croissante sur I.
- En remplaçant $f(a) \geqslant f(b)$ par $f(a) > f(b)$ dans la définition, on dit alors que f est strictement décroissante sur I.
- Quand une fonction reste croissante ou décroissante sur un intervalle, on dit qu'elle est monotone sur cet intervalle. Dire qu'une fonction n'est pas monotone sur un intervalle signifie qu'elle change de sens de variation sur cet intervalle.

Méthode pratique (niveau seconde) pour étudier le sens de variation d'une fonction f sur un intervalle I :

1. On considère deux réels a et b quelconques dans I tels que $b - a > 0$.
2. On calcule $f(b) - f(a)$ en factorisant le résultat si possible.
3. On étudie le signe de $f(b) - f(a)$:
   - Si $f(b) - f(a)$ reste toujours positif sur I alors on peut conclure que f est croissante sur I ;
   - Si $f(b) - f(a)$ reste toujours négatif sur I alors on peut conclure que f est décroissante sur I.

1. Généralités

Exemple(s)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$.

- *Étude du sens de variation de f sur $]-\infty\,;\,0[$:*
  Pour tous réels a et b dans $]-\infty\,;\,0[$ tels que $b - a > 0$, on a :
  $f(b) - f(a) = 3b^2 - 3a^2 = 3\left(b^2 - a^2\right) = 3\underbrace{(b-a)}_{+} \times \underbrace{(b+a)}_{\substack{- \\ \text{car } b<0 \text{ et } a<0}}$.
  $f(b) - f(a)$ reste donc toujours négatif sur $]-\infty\,;\,0[$.
  On en conclut que f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$.
- *Étude du sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$:*
  Pour tous réels a et b dans $]0\,;\,+\infty[$ tels que $b - a > 0$, on a :
  $f(b) - f(a) = 3b^2 - 3a^2 = 3\left(b^2 - a^2\right) = 3\underbrace{(b-a)}_{+} \times \underbrace{(b+a)}_{\substack{+ \\ \text{car } b>0 \text{ et } a>0}}$.
  $f(b) - f(a)$ reste donc toujours positif sur $]0\,;\,+\infty[$.
  On en conclut que f est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
- *Résumé dans un tableau de variations :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(0) = 0$	$\nearrow$	

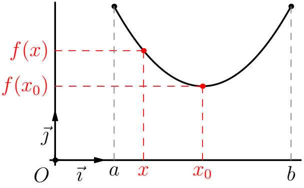
1. Généralités

d) Maximum et minimum d'une fonction sur un intervalle

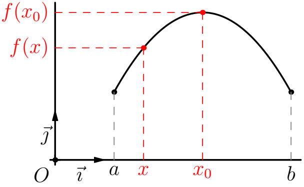
Définition

Étant donné f une fonction définie sur un intervalle $[a\,;\,b]$ contenant x_0 :

- On dit que f admet un **minimum** en x_0 sur $[a\,;\,b]$ si pour tout x de $[a\,;\,b]$, on a $f(x) \geqslant f(x_0)$.



- On dit que f admet un **maximum** en x_0 sur $[a\,;\,b]$ si pour tout x de $[a\,;\,b]$, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$.

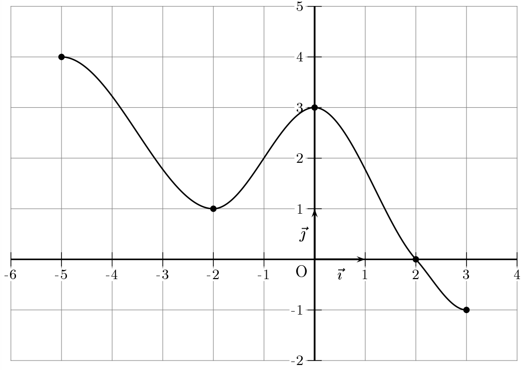


1. Généralités

Exemple(s)

Une fonction f est définie sur $[-5\,;\,3]$ par sa courbe ci-dessous :

- L'image de -2 par f est $f(-2)=1$.
- L'antécédent de 0 par f est 2.
- f admet un minimum sur $[-5\,;\,0]$ en $x=-2$.
- f admet un minimum sur $[-5\,;\,3]$ en $x=3$.
- f admet un maximum sur $[-2\,;\,2]$ en $x=0$.
- f admet un maximum sur $[-5\,;\,3]$ en $x=-5$.

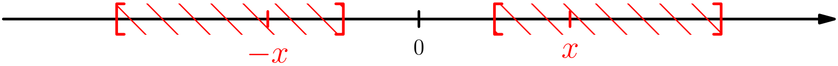


2. Parité d'une fonction

a) Partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0

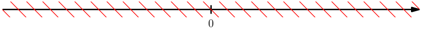
Définition

Une partie I de $\mathbb{R}$ est dite symétrique par rapport à 0 si pour tout x de I, $-x$ est aussi dans I.

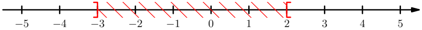


Exemple(s)

- $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.

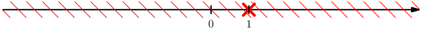


- $]-3\,;\,2[$ n'est pas symétrique par rapport à 0.



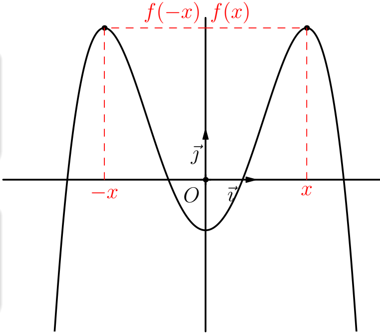
- $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$, c'est à dire $\mathbb{R}$ privé de 0, est symétrique par rapport à 0.

- $]-\infty\,;\,1[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$, c'est à dire $\mathbb{R}$ privé de 1, n'est pas symétrique par rapport à 0.



2. Parité d'une fonction

b) Fonction paire



Définition

Une fonction f définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ est dite **paire** si I est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout x de I, on a $f(-x) = f(x)$.

Propriété(s)

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est ***symétrique par rapport à l'axe des ordonnées****.*

Exemple(s)

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$ est paire car $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = f(x)$.
2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$ n'est pas paire. $\mathbb{R}$ est bien symétrique par rapport à 0 mais, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(-x) = 2(-x) + 1 = -2x + 1 \neq f(x)$.

2. Parité d'une fonction

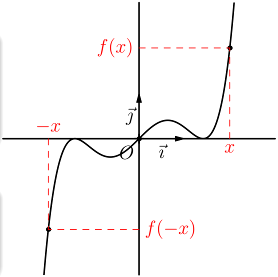
c) Fonction impaire

Définition

Une fonction f définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ est dite **impaire** si I est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout x de I, on a $f(-x) = -f(x)$.

Propriété(s)

La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.



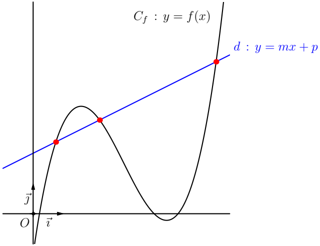
Exemple(s)

1. La fonction f définie sur $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x}$ est impaire car $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout x de $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$, on a $f(-x) = \dfrac{2}{-x} = -\dfrac{2}{x} = -f(x)$.
2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$ n'est pas impaire. $\mathbb{R}$ est bien symétrique par rapport à 0 mais, pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(-x) = 2(-x) + 1 = -2x + 1 \neq -f(x)$.

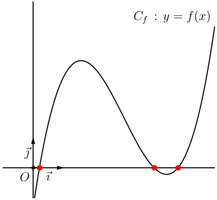
3. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Propriété(s)

Étant donné une fonction f définie sur I et C_f sa courbe représentative dans un repère.



• *Les solutions sur I de l'équation $f(x) = mx + p$ sont les abscisses des points d'intersection entre la courbe C_f et la droite d d'équation $y = mx + p$.*

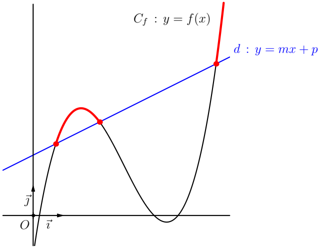


• *Cas particulier : les solutions sur I de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection entre la courbe C_f et l'axe des abscisses.*

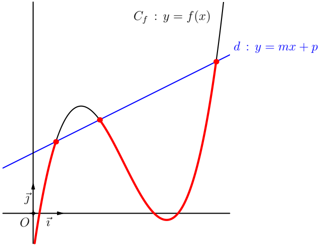
3. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Propriété(s)

• *Les solutions sur I de l'inéquation $f(x) \geqslant mx + p$ sont les abscisses des points de la courbe C_f situés au dessus et sur la droite d d'équation $y = mx + p$.*



• *Les solutions sur I de l'inéquation $f(x) \leqslant mx + p$ sont les abscisses des points de la courbe C_f situés en dessous et sur la droite d d'équation $y = mx + p$.*

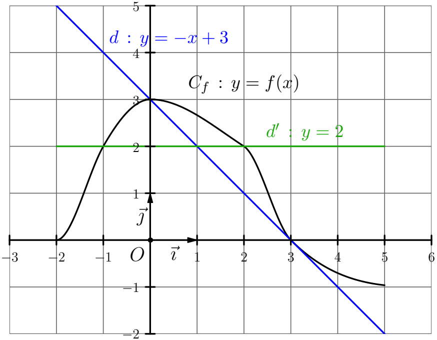


3. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Exemple(s)

Une fonction f est définie sur $[-2\,;\,5]$ par sa courbe C_f ci-dessous :

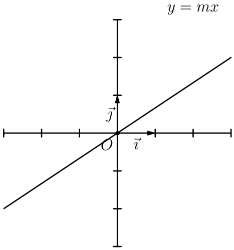
- Les solutions de l'équation $f(x) = -x + 3$ sont 0 et 3 (abscisses des points d'intersection entre la courbe C_f et la droite d d'équation $y = -x + 3$)
- Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont -2 et 3 (abscisses des points d'intersection entre la courbe C_f et l'axe des abscisses)
- Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont -1 et 2 (abscisses des points d'intersection entre la courbe C_f et la droite horizontale d' d'équation $y = 2$)
- L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant -x + 3$ est l'intervalle $[0\,;\,5]$ (abscisses des points de la courbe C_f situés au dessus et sur la droite d d'équation $y = -x + 3$)
- L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 2$ est l'intervalle $]-1\,;\,2[$ (abscisses des points de la courbe C_f situés strictement au dessus de la droite horizontale d' d'équation $y = 2$)



4. Fonctions de référence

a) Les fonctions linéaires

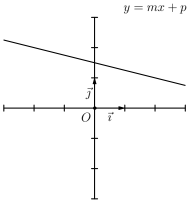
- Elles sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx$.
- La courbe représentative est une droite passant par l'origine et dont le coefficient directeur est égal à m.
- Elles sont impaires car $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout x, $f(-x) = m(-x) = -mx = -f(x)$.
- Variations : Pour tous réels a et b de $\mathbb{R}$ tels que $b - a > 0$, $f(b) - f(a) = m\underbrace{(b-a)}_{+}$.
  - Si $m > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
  - Si $m < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.



4. Fonctions de référence

b) Les Fonctions affines

- Elles sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
- La courbe représentative est une droite dont le coefficient directeur est égal à m.
- Variations : Pour tous réels a et b de $\mathbb{R}$ tels que $b - a > 0$, $f(b) - f(a) = (mb + p) - (ma + p) = m\underbrace{(b - a)}_{+}$.
  - Si $m > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
  - Si $m < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.



Remarque(s)

Déterminer l'expression d'une fonction affine connaissant deux de ses valeurs revient à déterminer l'équation réduite d'une droite connaissant deux de ses points.

Exemple : déterminer la fonction affine f telle que $f(5) = 3$ et $f(6) = 7$ revient à déterminer l'équation réduite de la droite d passant par le point A d'abscisse $x_A = 5$ et d'ordonnée $y_A = 3$ et par le point B d'abscisse $x_B = 6$ et d'ordonnée $y_B = 7$.

On a donc $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{7-3}{6-5} = 4$. L'équation réduite de d est donc de la forme $y = 4x + p$.

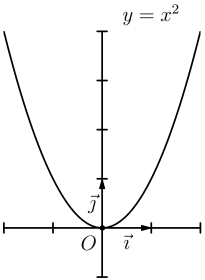
On doit avoir $y_A = 4x_A + p \Leftrightarrow 3 = 4 \times 5 + p \Leftrightarrow p = -17$.

L'équation réduite de d est $y = 4x - 17$ et f est définie par $f(x) = 4x - 17$.

4. Fonctions de référence

c) La fonction carré

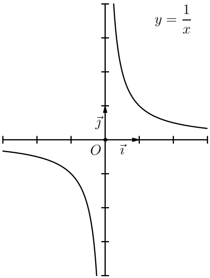
- C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
- Sa courbe représentative est une parabole.
- La fonction carrée est paire car $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout x, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
- Variations :
  - Pour tous réels a et b de $]-\infty\,;\,0[$ tels que $b - a > 0$,
    $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = \underbrace{(b-a)}_{+} \times \underbrace{(b+a)}_{\substack{- \\ \text{car } b<0 \text{ et } a<0}} < 0.$
    Donc la fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$.
  - Pour tous réels a et b de $]0\,;\,+\infty[$ tels que $b - a > 0$,
    $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = \underbrace{(b-a)}_{+} \times \underbrace{(b+a)}_{\substack{+ \\ \text{car } b>0 \text{ et } a>0}} > 0.$
    Donc la fonction carrée est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.



4. Fonctions de référence

d) La fonction inverse

- C'est la fonction définie sur $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.
- Sa courbe représentative est une hyperbole.
- La fonction inverse est impaire car $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$ est symétrique par rapport à 0 et, pour tout $x\neq 0$, $f(-x)=\frac{1}{-x}=-f(x)$.
- Variations :
  - Pour tous réels a et b de $]-\infty\,;\,0[$ tels que $b-a>0$,
$$f(b)-f(a)=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}=\frac{-\overbrace{(b-a)}^{+}}{\underbrace{(ab)}_{+}}<0.$$
Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$.
  - Pour tous réels a et b de $]0\,;\,+\infty[$ tels que $b-a>0$,
$$f(b)-f(a)=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{a-b}{ab}=\frac{-\overbrace{(b-a)}^{+}}{\underbrace{(ab)}_{+}}<0.$$
Donc f est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.



4. Fonctions de référence

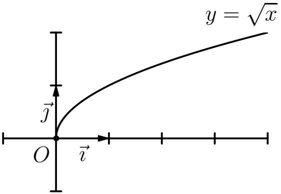
e) La fonction racine carrée

- C'est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.
- Variations : pour tous réels a et b de $[0\,;\,+\infty[$ tels que $b-a>0$,

$$f(b)-f(a)=\sqrt{b}-\sqrt{a}=\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\times\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$$

$$=\frac{\sqrt{b}^2-\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}=\frac{\overbrace{(b-a)}^{+}}{\underbrace{\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}_{+}}>0.$$

Donc f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

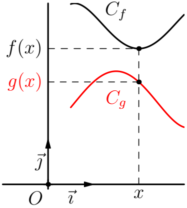


5. Détermination de la position relative de deux courbes

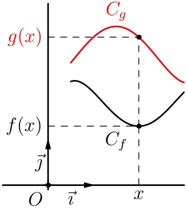
Principe

Étant donné f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I :

• Si, pour tout x de I, on a $f(x) - g(x) > 0$ (autrement dit si $f(x)$ est plus grand que $g(x)$), on peut conclure que la courbe de f est située au dessus de la courbe de g sur I.



• Si, pour tout x de I, on a $f(x) - g(x) < 0$ (autrement dit si $f(x)$ est plus petit que $g(x)$), on peut conclure que la courbe de f est située en dessous de la courbe de g sur I.



Fin du chapitre