Équations - Seconde

https://www.xm1math.net

1. Équations de la forme $ax + b = 0$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $ax + b = 0$ (avec $a \neq 0$) c'est déterminer l'ensemble noté S de tous les réels x tels que $ax + b = 0$.

Remarque(s)

La résolution de ces équations est basée sur les deux opérations suivantes :

- Opération n°1 : $ax+b = 0 \Leftrightarrow ax = -b$ (transposition d'un élément d'un membre à l'autre)
- Opération n°2 : $ax = -b \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{a}$ (division par le coefficient devant x)

Exemple(s)

1. Résolution de $2x + 3 = 0$: $2x+3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3}{2}$.$S = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$
2. Résolution de $3x - 4 = 0$: $3x-4 = 0 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$.$S = \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$
3. Résolution de $-\dfrac{1}{2}x + 7 = 0$: $-\dfrac{1}{2}x+7 = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x = -7 \Leftrightarrow x = \dfrac{-7}{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = -7 \times (-2) = 14$.$S = \{14\}$
4. Résolution de $7x = 0$: $7x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{0}{7} \Leftrightarrow x = 0$.$S = \{0\}$

2. Équations pouvant se ramener à la forme $ax+b=0$

a) Premiers exemples

Exemple(s)

1. Résolution de $2x-4=5x+1$:
   - On transpose tous les termes en x dans un membre et tout le reste dans l'autre : $2x-4=5x+1 \Leftrightarrow 2x-5x=1+4 \Leftrightarrow -3x=5$
   - Il n'y a plus qu'à diviser par le coefficient devant x : $-3x=5 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{-3}$. $S=\left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$
2. Résolution de $2(x+3)=x-1$:
   On développe le premier membre et on est ramené à un cas similaire à l'exemple précédent.
   $2(x+3)=x-1 \Leftrightarrow 2x+6=x-1 \Leftrightarrow 2x-x=-1-6 \Leftrightarrow x=-7$. $S=\{-7\}$
3. Résolution de $3(x-1)-2(3+x)=6x+12$:
   $3(x-1)-2(3+x)=6x+12 \Leftrightarrow 3x-3-6-2x=6x+12$
   $\Leftrightarrow x-9=6x+12 \Leftrightarrow x-6x=12+9 \Leftrightarrow -5x=21 \Leftrightarrow x=\dfrac{21}{-5}=-\dfrac{21}{5}$. $S=\left\{-\dfrac{21}{5}\right\}$

2. Équations pouvant se ramener à la forme $ax+b=0$

b) Équations sous la forme d'un produit d'expressions du premier degré égal à 0

On utilise le principe : « Dire qu'un produit de deux facteurs est nul équivaut à dire que le premier facteur est nul OU que le deuxième facteur est nul »

Exemple(s)

1. Résolution de $(2x-8)(6-3x)=0$:
$$\begin{aligned}(2x-8)(6-3x)=0 &\Leftrightarrow 2x-8=0 \text{ ou } 6-3x=0\\ &\Leftrightarrow 2x=8 \text{ ou } -3x=-6\\ &\Leftrightarrow x=\frac{8}{2}=4 \text{ ou } x=\frac{-6}{-3}=2.\ S=\{4\,;\,2\}\end{aligned}$$
2. Résolution de $(2x+5)\left(3-\frac{x}{2}\right)=0$:
$$\begin{aligned}(2x+5)\left(3-\tfrac{x}{2}\right)=0 &\Leftrightarrow 2x+5=0 \text{ ou } 3-\tfrac{x}{2}=0\\ &\Leftrightarrow 2x=-5 \text{ ou } -\tfrac{1}{2}x=-3\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-5}{2}=-\frac{5}{2} \text{ ou } x=\frac{-3}{-\frac{1}{2}}=3\times 2=6.\ S=\left\{-\frac{5}{2}\,;\,6\right\}\end{aligned}$$

2. Équations pouvant se ramener à la forme $ax + b = 0$

c) Équations où il faut factoriser

Certaines équations ne sont pas initialement sous la forme d'un produit d'expressions du premier degré égal à 0 mais peuvent s'y ramener. Pour cela, il faut :

- « se ramener à 0 » (c'est à dire transposer tous les éléments dans un seul membre afin de se ramener à la forme $\cdots = 0$) ;
- factoriser pour se ramener à un produit d'expressions du premier degré égal à 0.
  Pour factoriser :
  • on cherche d'abord si on reconnaît la forme $a^2 - b^2$ (que l'on remplace alors par $(a-b)(a+b)$) ;
  • sinon, on cherche s'il y a un facteur commun dans l'expression ;
  • en dernier recours (et uniquement en dernier recours), on peut développer l'expression qui en se simplifiant peut alors permettre la factorisation.

Exemple(s)

1) Résolution de $4x^2 - 9 = 0$: (présence de la forme $a^2 - b^2$)

$$\begin{aligned} 4x^2 - 9 = 0 &\Leftrightarrow (2x)^2 - 3^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-3)(2x+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x-3 = 0 \text{ ou } 2x+3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 3 \text{ ou } 2x = -3 \\ &\Leftrightarrow x = \tfrac{3}{2} \text{ ou } x = \tfrac{-3}{2}.\ S = \left\{\tfrac{3}{2}\,;\,-\tfrac{3}{2}\right\} \end{aligned}$$

2. Équations pouvant se ramener à la forme $ax + b = 0$

Exemple(s)

2) Résolution de $x^2 - 4x = 0$: (présence d'un facteur commun)

$$\begin{aligned} x^2 - 4x = 0 &\Leftrightarrow \underline{x} \times x - 4\underline{x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \underline{x}(x-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x-4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4.\ S = \{0\,;\,4\} \end{aligned}$$

3) Résolution de $(3x-12)^2 = x^2$:

$$\begin{aligned} (3x-12)^2 = x^2 &\Leftrightarrow (3x-12)^2 - x^2 = 0 \quad \text{(on se ramène à 0 et présence de la forme } a^2 - b^2\text{)} \\ &\Leftrightarrow (3x-12-x)(3x-12+x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-12)(4x-12) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x-12 = 0 \text{ ou } 4x-12 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x = 12 \text{ ou } 4x = 12 \\ &\Leftrightarrow x = \tfrac{12}{2} = 6 \text{ ou } x = \tfrac{12}{4} = 3.\ S = \{6\,;\,3\} \end{aligned}$$

2. Équations pouvant se ramener à la forme $ax+b=0$

Exemple(s)

4) Résolution de $(x+2)^2 = 3(x+2)$:

$$\begin{aligned}
(x+2)^2 = 3(x+2) &\Leftrightarrow (x+2)^2 - 3(x+2) = 0 \quad \text{(on se ramène à 0)}\\
&\Leftrightarrow (x+2) \times \underline{(x+2)} - 3\underline{(x+2)} = 0 \quad \text{(présence d'un facteur commun)}\\
&\Leftrightarrow \underline{(x+2)}\,(x+2-3) = 0\\
&\Leftrightarrow (x+2)\,(x-1) = 0\\
&\Leftrightarrow x+2 = 0 \text{ ou } x-1 = 0\\
&\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 1.\ S = \{-2\,;\,1\}
\end{aligned}$$

5) Résolution de $2x^2 - 5x = (2x-5)(2x+4)$:

$$\begin{aligned}
2x^2 - 5x = (2x-5)(2x+4) &\Leftrightarrow 2x^2 - 5x - (2x-5)(2x+4) = 0 \quad \text{(on se ramène à 0)}\\
&\Leftrightarrow x\underline{(2x-5)} - \underline{(2x-5)}(2x+4) = 0 \quad \text{(présence d'un facteur commun)}\\
&\Leftrightarrow \underline{(2x-5)}\,[x-(2x+4)] = 0\\
&\Leftrightarrow (2x-5)\,(-x-4) = 0\\
&\Leftrightarrow 2x-5 = 0 \text{ ou } -x-4 = 0\\
&\Leftrightarrow 2x = 5 \text{ ou } -x = 4\\
&\Leftrightarrow x = \tfrac{5}{2} \text{ ou } x = \tfrac{4}{-1}.\ S = \left\{\tfrac{5}{2}\,;\,-4\right\}
\end{aligned}$$

2. Équations pouvant se ramener à la forme $ax+b=0$

d) Équations avec l'inconnue au dénominateur

Méthode

- Déterminer les valeurs de l'inconnue qui annulent le(s) dénominateur(s) et donc pour lesquelles l'équation est impossible. C'est ce qu'on appelle déterminer les **valeurs interdites**
- Si possible, se ramener à la forme « **une** fraction = **une** fraction » et utiliser « le produit en croix » : $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \Leftrightarrow A \times D = B \times C$
- Si cela n'est pas possible, il faut alors se ramener à 0 et se ramener à la forme « **une** fraction =0 » (par réduction au même dénominateur...) et utiliser que $\dfrac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- Après détermination des x, vérifier qu'il ne s'agit pas de valeurs interdites avant d'écrire S.

Exemple(s)

1) Résolution de $\dfrac{12}{x+1} = 3$ .Valeur interdite : il faut $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}
\frac{12}{x+1} = 3 &\Leftrightarrow 12 = 3 \times (x+1)\\
&\Leftrightarrow 12 = 3x+3\\
&\Leftrightarrow 12-3 = 3x\\
&\Leftrightarrow 9 = 3x \Leftrightarrow \tfrac{9}{3} = x.\ S = \{3\}
\end{aligned}$$

2. Équations pouvant se ramener à la forme $ax+b=0$

Exemple(s)

2) Résolution de $\dfrac{2-x}{x-1}=2$ .Valeur interdite : il faut $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}\frac{2-x}{x-1}=2 &\Leftrightarrow 2-x=2\times(x-1)\\ &\Leftrightarrow 2-x=2x-2\\ &\Leftrightarrow 2+2=2x+x\\ &\Leftrightarrow 4=3x\\ &\Leftrightarrow \tfrac{4}{3}=x.\ S=\left\{\tfrac{4}{3}\right\}\end{aligned}$$

3) Résolution de $\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{4}{3x}$ .Valeurs interdites : il faut $x+2\neq 0$ et $3x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$ et $x\neq 0$.
Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}\frac{3}{x+2}=\frac{4}{3x} &\Leftrightarrow 3\times 3x=4\times(x+2)\\ &\Leftrightarrow 9x=4x+8\\ &\Leftrightarrow 9x-4x=8\\ &\Leftrightarrow 5x=8\\ &\Leftrightarrow \tfrac{8}{5}=x.\ S=\left\{\tfrac{8}{5}\right\}\end{aligned}$$

2. Équations pouvant se ramener à la forme $ax+b=0$

Exemple(s)

4) Résolution de $\dfrac{(2x+3)^2-9}{x}=0$ .Valeur interdite : il faut $x\neq 0$.
Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}\frac{(2x+3)^2-9}{x}=0 &\Leftrightarrow (2x+3)^2-9=0\times x\\ &\Leftrightarrow (2x+3)^2-9=0\\ &\Leftrightarrow (2x+3)^2-3^2=0 \quad \text{(présence de la forme } a^2-b^2\text{)}\\ &\Leftrightarrow [(2x+3)-3]\,[(2x+3)+3]=0\\ &\Leftrightarrow 2x(2x+6)=0 \quad \text{(présence d'un produit égal à 0)}\\ &\Leftrightarrow 2x=0 \text{ ou } 2x+6=0\\ &\Leftrightarrow x=\tfrac{0}{2}=0 \text{ ou } 2x=-6\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=\tfrac{-6}{2}=-3\end{aligned}$$

Comme 0 est une valeur interdite, on a finalement $S=\{-3\}$

3. Équations de la forme $x^2 = a$

Principe

- Si a est strictement négatif, l'équation $x^2 = a$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$;
- L'équation $x^2 = 0$ admet 0 comme unique solution ;
- Si a est strictement positif, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exemple(s)

1. Résolution de $x^2 = 4$: $x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{4} = 2$ ou $x = -\sqrt{4} = -2$. $S = \{2\,;\,-2\}$
2. Résolution de $x^2 = -1$: cette équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$. $S = \varnothing$.
3. Résolution de $(x-3)^2 = 25$:

$$\begin{aligned}(x-3)^2 = 25 &\Leftrightarrow x - 3 = \sqrt{25} \text{ ou } x - 3 = -\sqrt{25}\\ &\Leftrightarrow x{-3} = 5 \text{ ou } x{-3} = -5\\ &\Leftrightarrow x = 5{+3} \text{ ou } x = -5{+3}\\ &\Leftrightarrow x = 8 \text{ ou } x = -2.\ S = \{8\,;\,-2\}\end{aligned}$$

Fin du chapitre