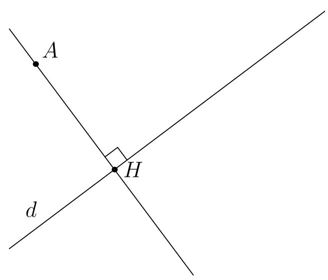
Configurations du plan - Seconde

https://www.xm1math.net

1. Projeté orthogonal

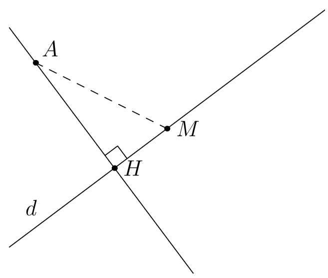
Définition

Le projeté orthogonal d'un point A sur une droite d est le point H sur la droite d tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite d.



Propriété(s)

Le projeté orthogonal d'un point A sur une droite d est le point de d qui est le plus proche de A (pour tout point M distinct de H sur d, on a $AM > AH$).

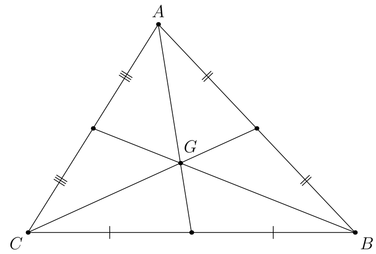


2. Configurations et théorèmes dans les triangles quelconques

a) Droites et points remarquables d'un triangle

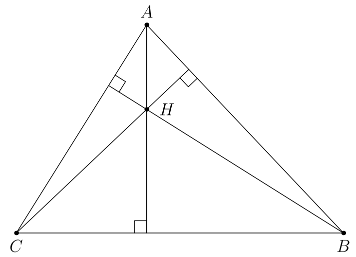
Propriété(s)

Les trois médianes d'un triangle (droites passant par un sommet et le milieu du côté opposé) se coupent en un même point G qui est ***le centre de gravité*** *du triangle.*



Propriété(s)

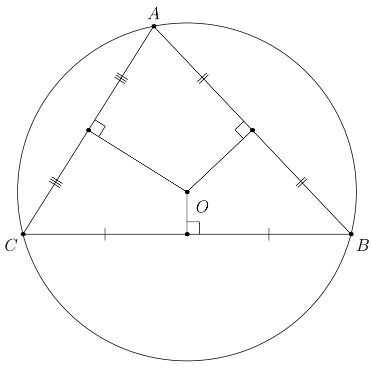
Les trois hauteurs d'un triangle (droites passant par un sommet et le projeté orthogonal de ce sommet sur le côté opposé) se coupent en un même point H qui est ***l'orthocentre*** *du triangle.*



2. Configurations et théorèmes dans les triangles quelconques

Propriété(s)

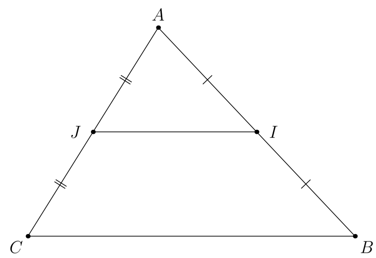
Les trois médiatrices d'un triangle (droites passant par le milieu d'un côté et perpendiculaires à ce côté) se coupent en un même point O qui est ***le centre du cercle circonscrit*** *du triangle.*



b) Théorème des milieux

Théorème

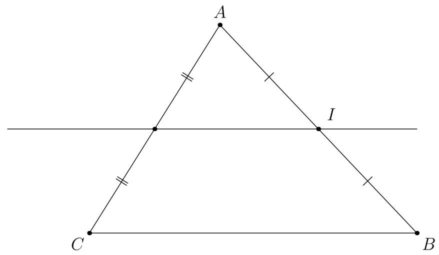
Si I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[AC]$ alors $(IJ) \mathbin{/\!/} (BC)$ et $IJ = \frac{1}{2}BC$.



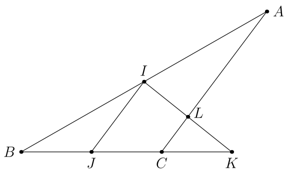
2. Configurations et théorèmes dans les triangles quelconques

Théorème

Si I est le milieu de $[AB]$ alors la droite parallèle à (BC) passant par I coupe $[AC]$ en son milieu.



▶ *Exemple :* Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$, J le milieu de $[BC]$, K le point tel que C soit le milieu de $[JK]$ et L l'intersection entre les droites (IK) et (AC).



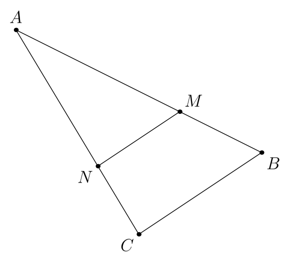
- *Montrer que les droites (LC) et (IJ) sont parallèles.*
  I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[BC]$ donc ,d'après le 1er théorème des milieux, on a $(IJ) /\!/ (AC)$. On en déduit que $(IJ) /\!/ (LC)$ car A, C et L sont sur une même droite.
- *En déduire que L est le milieu de $[IK]$.*
  C est le milieu de $[JK]$ et $(IJ) /\!/ (LC)$ donc ,d'après le 2e théorème des milieux, L est le milieu de $[IK]$.
- *Montrer que $LC = \frac{1}{4}AC$.*
  Dans le triangle IJK on a $LC = \frac{1}{2}IJ$ et dans le triangle ABC on a $IJ = \frac{1}{2}AC$. Donc, on a bien $LC = \frac{1}{4}AC$.

2. Configurations et théorèmes dans les triangles quelconques

c) Théorème de Thalès

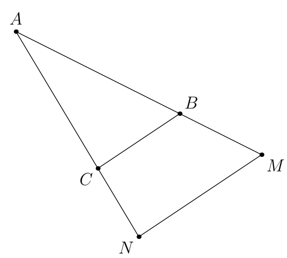
Théorème

Dans un triangle ABC, si M est sur la droite (AB), si N est sur la droite (AC) et si la droite (MN) est parallèle à (BC) alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.



Théorème

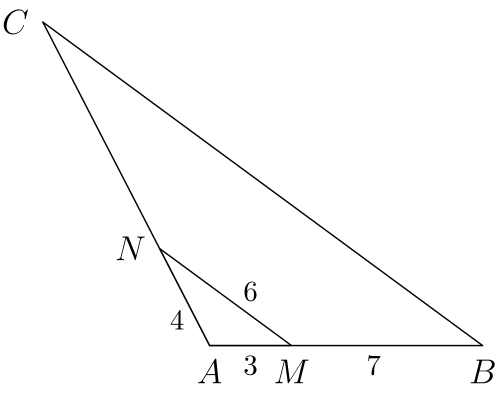
Dans un triangle ABC, si M est sur la droite (AB), si N est sur la droite (AC), si A, M, B et A, N, C sont dans le même ordre et si $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ *alors* $(MN) /\!/ (BC)$



2. Configurations et théorèmes dans les triangles quelconques

▶ *Exemple :*
Dans la configuration ci-contre, on a :
$AM = 3$, $MB = 7$, $AN = 4$, $MN = 6$ et $(MN)//(BC)$.
Calculer les distances AC, NC et BC.

- On a $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$. On en déduit que $\frac{3}{10} = \frac{4}{AC} \Leftrightarrow 3 \times AC = 40 \Leftrightarrow AC = \frac{40}{3}$.
- Dès lors, on a $NC = AC - 4 = \frac{40}{3} - \frac{12}{3} = \frac{28}{3}$.
- On a $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$. On en déduit que $\frac{6}{BC} = \frac{3}{10} \Leftrightarrow 3 \times BC = 60 \Leftrightarrow BC = 20$.



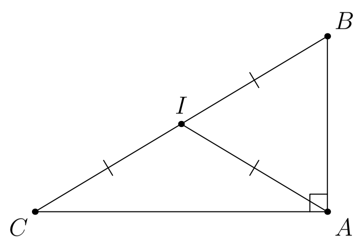
3. Configurations et théorèmes dans les triangles rectangles

a) Caractérisation d'un triangle rectangle

Propriété(s)

Dire qu'un triangle ABC est rectangle en A équivaut à dire que :

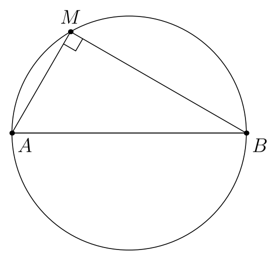
- $AB^2 + AC^2 = BC^2$ *(théorème de Pythagore)*
- $AI = \dfrac{BC}{2}$ *où I est le milieu de $[BC]$*
- *le cercle de diamètre $[BC]$ passe par A*



b) Théorème de l'angle droit

Théorème

Dire qu'un point M distinct de A et B appartient au cercle de diamètre $[AB]$ équivaut à dire que le triangle AMB est rectangle en M.



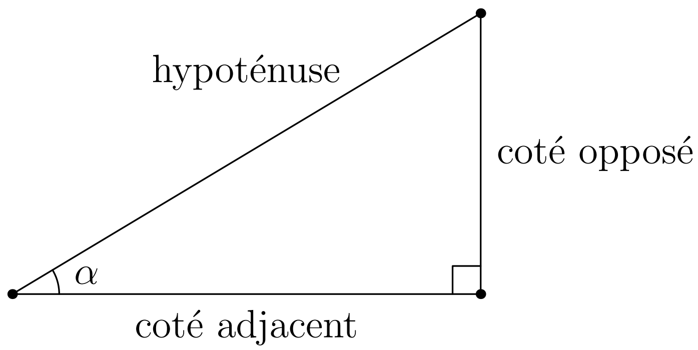
3. Configurations et théorèmes dans les triangles rectangles

c) Trigonométrie dans un triangle rectangle

Propriété(s)

Dans un triangle rectangle :

- $\cos\alpha = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$
- $\sin\alpha = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$
- $\tan\alpha = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$

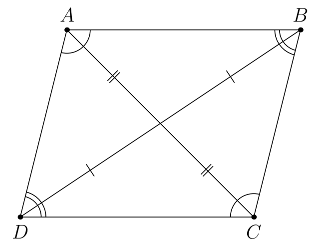


4. Parallélogrammes, rectangles, losanges et carrés

Propriété(s)

*Dire qu'un quadrilatère non croisé $ABCD$ est un **parallélogramme** équivaut à dire qu'il vérifie une des propriétés suivantes :*

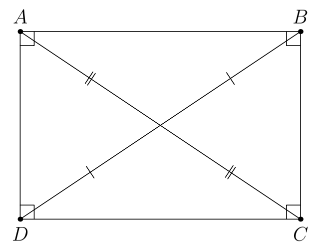
- *ses côtés sont parallèles deux à deux*
- *ses diagonales se coupent en leur milieu*
- *deux côtés opposés sont parallèles et de même longueur*
- *les angles opposés sont égaux deux à deux*



Propriété(s)

*Dire qu'un quadrilatère $ABCD$ est un **rectangle** équivaut à dire qu'il vérifie une des propriétés suivantes :*

- *c'est un parallélogramme avec un angle droit*
- *c'est un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur*

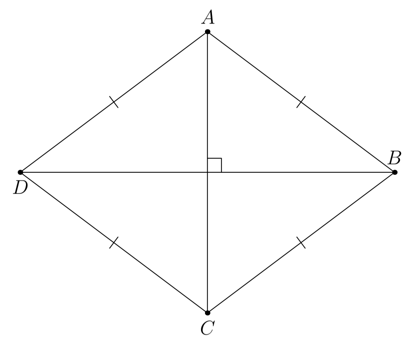


4. Parallélogrammes, rectangles, losanges et carrés

Propriété(s)

Dire qu'un quadrilatère $ABCD$ est un ***losange*** *équivaut à dire qu'il vérifie une des propriétés suivantes :*

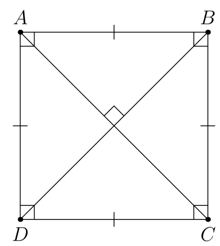
- *ses quatre côtés ont même longueur*
- *c'est un parallélogramme dont deux côtés consécutifs ont même longueur*
- *c'est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires*



Propriété(s)

Dire qu'un quadrilatère $ABCD$ est un ***carré*** *équivaut à dire qu'il vérifie une des propriétés suivantes :*

- *il a quatre angles droits et quatre côtés de même longueur*
- *c'est un rectangle ayant deux côtés consécutifs de même longueur*
- *c'est un losange ayant un angle droit*



Fin du chapitre