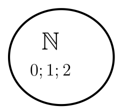
Calcul numérique - Seconde

https://www.xm1math.net

1. Les ensembles de nombres

a) $\mathbb{N}$

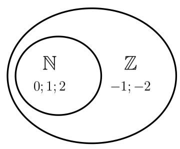
L'ensemble des **entiers naturels** (c'est à dire les entiers positifs $0; 1; 2; \cdots$) est noté $\mathbb{N}$.



b) $\mathbb{Z}$

L'ensemble des **entiers relatifs** (c'est à dire les entiers positifs et négatifs $\cdots; -1; -1; 0; 1; 2; \cdots$) est noté $\mathbb{Z}$.

▶ **Remarque :** comme tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont aussi dans $\mathbb{Z}$, on dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$.

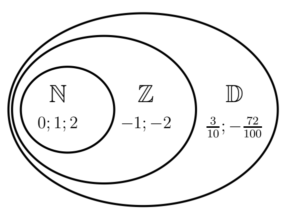


c) $\mathbb{D}$

Tout nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction dont le numérateur est un entier et dont le dénominateur est une puissance de 10 est appelé **nombre décimal** et l'ensemble de ces nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

▶ **Exemples :** 2,1 est un nombre décimal car il peut s'écrire sous la forme $\frac{21}{10}$. De même $-0{,}03$ qui peut s'écrire sous la forme $-\frac{3}{100}$ est un nombre décimal.

▶ **Remarque :** comme tous les éléments de $\mathbb{Z}$ sont aussi dans $\mathbb{D}$, $\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{D}$.



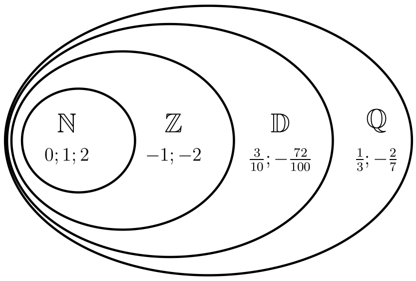
1. Les ensembles de nombres

d) $\mathbb{Q}$

Tout nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction d'entiers (positifs ou négatifs) est appelé **nombre rationnel** et l'ensemble de ces nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$.

▶ **Remarque :** $\mathbb{Q}$ contient les nombres décimaux mais aussi toutes les fractions d'entiers dont le dénominateur entier n'est pas une puissance de 10. $\mathbb{D}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$.

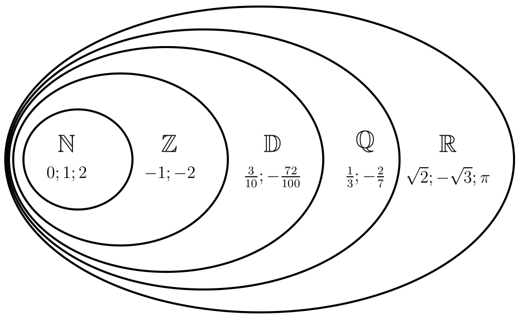
▶ **Exemples :** les fractions $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{7}$ sont des rationnels (sans être des décimaux).



e) $\mathbb{R}$

Certains nombres (comme $\sqrt{2}$, π) ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction d'entiers. Ces nombres sont appelés **irrationnels**.

L'ensemble formé des rationnels et des irrationnels est appelé ensemble des **nombres réels** et il est noté $\mathbb{R}$.



2. Propriétés des entiers

a) Divisibilité

Si un entier a est égal au produit d'un entier b par un autre entier k, on dit que a est un **multiple** de b et que b est un diviseur de a.

▶ **Exemple :** on a $21 = 7 \times 3$ donc on peut dire que 21 est un multiple de 3 et que 3 est un diviseur de 21.

b) Entiers pairs et impairs

- Un entier naturel n est pair s'il est un multiple de 2, autrement s'il peut s'écrire sous la forme $n = 2k$ où k est un entier.
- Tous les autres entiers naturels sont dits impairs et comme ils alternent avec les entiers pairs, dire qu'un entier n est impair équivaut à dire qu'il peut s'écrire sous la forme $n = 2k + 1$ où k est un entier.

c) Nombres premiers

Un nombre premier est un entier supérieur ou égal à 2 qui n'est divisible que par 1 et lui-même.

▶ **Exemples :** Les premiers nombres premiers sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$.

15 n'est pas premier car il est divisible par 3.

d) Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers

On admet que tout entier supérieur ou égal à 2 peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers.

▶ **Exemples :** $30 = 2 \times 3 \times 5$; $56 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$

3. Règles de calculs dans $\mathbb{R}$

a, b, c, d et k étant des réels quelconques (non nuls, s'ils sont au dénominateur d'une fraction)

a) Avec des produits

- $a(b+c) = ab + ac$ — *exemple :* $2(x-4) = 2x - 8$
- $a(bc) = (ab)c$ — *exemple :* $4(3x^2) = (4 \times 3)x^2 = 12x^2$

b) Avec des quotients

- $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$ — *exemple :* $\frac{8}{12} = \frac{2\times4}{3\times4} = \frac{2}{3}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ — *exemple :* $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{d} + \frac{c}{d} \times \frac{b}{b} = \frac{ad+bc}{bd}$ — *exemple :* $\frac{1}{2} + \frac{5}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{3} + \frac{5}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{3+10}{2\times3} = \frac{13}{6}$
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ — *exemple :* $\frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{3\times5}{4\times2} = \frac{15}{8}$
- $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ — *exemple :* $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ — *exemple :* $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$

xm1math.net

3. Règles de calculs dans $\mathbb{R}$

c) Règles des signes

- $-(-a) = a$ — *exemple :* $-(-2x) = 2x$
- $-(a+b) = -a - b$ — *exemple :* $-(2+x) = -2 - x$
- $-(a-b) = -a + b$ — *exemple :* $-(3x-4) = -3x + 4$
- $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ — *exemples :* $\frac{-2}{7} = -\frac{2}{7}$; $\frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$
- $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ — *exemple :* $\frac{-x}{-3} = \frac{x}{3}$

d) Nullité d'un produit

Dire qu'un produit de deux facteurs est nul équivaut à dire que le premier facteur est nul OU que le deuxième facteur est nul.

e) Racine carrée d'un réel positif

Rappel : la racine carrée d'un réel positif a est l'unique réel positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est égal à a.

Exemple : $\sqrt{3}$ est le nombre positif dont le carré est égal à 3. On a donc $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.

Règles de calculs : (pour tous réels a et b strictement positifs)

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

xm1math.net

4. Identités remarquables

Propriété(s)

Pour tous les réels a et b :

- $(a+b)^2 \underset{\xleftarrow{factoriser}}{\xrightarrow{développer}} a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2 \underset{\xleftarrow{factoriser}}{\xrightarrow{développer}} a^2-2ab+b^2$
- $(a-b)(a+b) \underset{\xleftarrow{factoriser}}{\xrightarrow{développer}} a^2-b^2$

Démonstrations

- $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ba+b^2=a^2-2ab+b^2$
- $(a-b)(a+b)=a^2+ab-ba-b^2=a^2-b^2$

(apprendre les identités remarquables permet d'utiliser directement le résultat des formules sans avoir à refaire ces calculs)

4. Identités remarquables

Exemple(s)

1. À l'aide des identités remarquables, développer les expressions suivantes :
(on utilise les identités remarquables dans le sens $\xrightarrow{développer}$*)*

- $(x+3)^2=x^2+2\times x\times 3+3^2=x^2+6x+9$
- $(3x+5)^2=(3x)^2+2\times 3x\times 5+5^2=9x^2+30x+25$
- $(4-x)^2=4^2-2\times 4\times x+x^2=16-8x+x^2$
- $(2x-6)^2=(2x)^2-2\times 2x\times 6+6^2=4x^2-24x+36$
- $(x-\sqrt{3})^2=x^2-2\times x\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=x^2-2\sqrt{3}x+3$
- $(7-x)(7+x)=7^2-x^2=49-x^2$
- $(5x-1)(5x+1)=(5x)^2-1^2=25x^2-1$

2. À l'aide des identités remarquables, factoriser les expressions suivantes :
(on utilise les identités remarquables dans le sens $\xleftarrow{factoriser}$*)*

- $x^2-4=x^2-2^2=(x-2)(x+2)$
- $9-4x^2=3^2-(2x)^2=(3-2x)(3+2x)$
- $x^2+10x+25=x^2+2\times x\times 5+5^2=(x+5)^2$
- $x^2-14x+49=x^2-2\times x\times 7+7^2=(x-7)^2$

5. Opérations sur les puissances

a) Puissance d'exposant entier strictement positif

Pour tout réel a et pour tout entier strictement positif n, la puissance $n^{\text{ième}}$ de a est le réel noté a^n tel que $a^1 = a$ et $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{\text{n fois}}$ si $n \geqslant 2$.

▶ **Exemples :** • $2^3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{\text{3 fois}}$ • $(-1,5)^4 = \underbrace{(-1,5) \times (-1,5) \times (-1,5) \times (-1,5)}_{\text{4 fois}}$

b) Puissance d'exposant entier strictement négatif

Pour tout réel non nul a et pour tout entier strictement positif n, la puissance $(-n)^{\text{ième}}$ de a est le réel noté a^{-n} tel que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

▶ **Exemples :** • $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$ • $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$.

c) Puissance d'exposant nul

Pour tout réel non nul a, on pose par convention que $a^0 = 1$.

▶ **Exemple :** $3^0 = 1$

5. Opérations sur les puissances

d) Règles de calculs avec les puissances

Pour tous les réels non nuls a et b et pour tous les entiers n et p :

- $a^n \times a^p = a^{n+p}$ — *exemple :* $7^2 \times 7^3 = 7^{2+3} = 7^5$
- $(a^n)^p = a^{np}$ — *exemple :* $(7^2)^3 = 7^{2\times 3} = 7^6$
- $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ — *exemple :* $\frac{5^8}{5^2} = 5^{8-2} = 5^6$
- $(ab)^n = a^n \times b^n$ — *exemple :* $(2x)^3 = 2^3 \times x^3 = 8x^3$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ — *exemple :* $\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{3^2} = \frac{x^2}{9}$

Exemple(s)

Simplifier les expressions suivants :

- $\frac{2^4 \times 2^5}{2^3} = \frac{2^{4+5}}{2^3} = \frac{2^9}{2^3} = 2^{9-3} = 2^6$
- $\frac{\left(10^{-2}\right)^3}{10^4 \times 10^3} = \frac{10^{-2\times 3}}{10^{4+3}} = \frac{10^{-6}}{10^7} = 10^{-6-7} = 10^{-13}$
- $\frac{(2x)^3}{x^{(-4)}} = \frac{2^3 \times x^3}{x^{(-4)}} = 8 \times \frac{x^3}{x^{(-4)}} = 8x^{3-(-4)} = 8x^7$

6. Notation scientifique

Tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme $a \times 10^p$ où a est un décimal ne comportant qu'un seul chiffre (non nul) avant la virgule et p est un entier relatif.
Cette écriture est appelée **notation scientifique**.

Exemple(s)

- La notation scientifique de 15 000 est $1{,}5 \times 10^4$ car $1\overleftarrow{5000}^{4}$
- La notation scientifique de 0,000 000 2 est 2×10^{-7} car $0,\overrightarrow{0000002}^{7}$
- La notation scientifique de 876 000 000 est $8{,}76 \times 10^8$ car $8\overleftarrow{76000000}^{8}$
- La notation scientifique de −0,000 14 est $-1{,}4 \times 10^{-4}$ car $-0,\overrightarrow{00014}^{4}$

Remarque(s)

Sur une calculatrice, $1{,}5 \times 10^4$ s'obtient en tapant `1.5` $\boxed{\texttt{x10}^x}$ `4` ou `1.5` $\boxed{\texttt{EE}}$ `4`

7. Complément sur les racines carrées

a) Expressions conjuguées

Pour tous réels a et b strictement positifs, les expressions $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ et $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ sont dites conjuguées l'une de l'autre et leur produit est égal à $a-b$.
▶ **Exemples :** L'expression conjuguée de $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$ est $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ et l'expression conjuguée de $\left(3-\sqrt{2}\right)$ est $\left(3+\sqrt{2}\right)$.

b) Élimination de la racine au dénominateur d'une fraction de la forme $\frac{1}{\sqrt{a}}$

▶ **Méthode :** il suffit de multiplier en haut et en bas par $\sqrt{a}$.
▶ **Exemple :** $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

c) Élimination de la racine au dénominateur d'une fraction de la forme $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

▶ **Méthode :** il suffit de multiplier en haut et en bas par l'expression conjuguée du dénominateur.
▶ **Exemple :** $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

Fin du chapitre