Inégalités

▶ Exercice n°1

1. si $1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$ alors $-3 \leqslant -2x \leqslant -2$ donc $-2 \leqslant -2x+1 \leqslant 1$
2. si $-4 < x < -\frac{1}{2}$ alors $-12 < 3x < -\frac{3}{2}$ donc $-13 < 3x-1 < -\frac{5}{2}$
3. si $-2 < x < \sqrt{2}$ alors $-\sqrt{2} < -x < 2$ donc $2-\sqrt{2} < 2-x < 4$
4. si $-5 \leqslant x \leqslant 2$ alors $-2 \leqslant -x \leqslant 5$ donc $2 \leqslant 4-x \leqslant 9$
5. si $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3$ alors $\frac{1}{4} \leqslant x^2 \leqslant 9$ donc $-\frac{15}{4} \leqslant x^2-4 \leqslant 5$
6. si $\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 7$ alors $\frac{1}{7} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{2}{3}$ donc $\frac{2}{7} \leqslant \frac{2}{x} \leqslant \frac{4}{3}$
7. si $-6 \leqslant 12x \leqslant 2$ alors $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{6}$
8. si $-4 < 3x-1 < 8$ alors $-3 < 3x < 9$ donc $-1 < x < 3$
9. si $-\frac{3}{2} \leqslant 1-2x \leqslant \frac{5}{4}$ alors $-\frac{5}{2} \leqslant -2x \leqslant \frac{1}{4}$ donc $-\frac{1}{8} \leqslant x \leqslant \frac{5}{4}$
10. si $-10 \leqslant 7-x \leqslant 1$ alors $-17 \leqslant -x \leqslant -6$ donc $6 \leqslant x \leqslant 17$
11. si $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{3}{4}$ alors $\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 2$
12. si $3 \leqslant \frac{3}{x} \leqslant 12$ alors $1 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 4$ donc $\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1$

▶ Exercice n°2

On considère deux réels x et y tels que $1 \leqslant x \leqslant 3$ et $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{3}{2}$.

1. $\frac{3}{2} \leqslant x+y \leqslant \frac{9}{2}$; $\frac{1}{2} \leqslant xy \leqslant \frac{9}{2}$; $2 \leqslant x+2y \leqslant 6$; $-\frac{27}{2} \leqslant -3xy \leqslant -\frac{3}{2}$.
2. $-\frac{3}{2} \leqslant -y \leqslant -\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2} \leqslant x-y \leqslant \frac{5}{2}$.
3. $\frac{2}{3} \leqslant \frac{1}{y} \leqslant 2$; $\frac{2}{3} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant 6$.

▶ Exercice n°3

1. $1 < -x < 2$; $3 < -xy < 12$; $-12 < xy < 3$.
2. $\frac{1}{6} < \frac{1}{y} < \frac{1}{3}$; $\frac{1}{6} < \frac{-x}{y} < \frac{2}{3}$; $-\frac{2}{3} < \frac{x}{y} < -\frac{1}{6}$.

▶ Exercice n°4

$1 < -x < 4$ et $2 < -y < 3$ donc $2 < xy < 12$

$1 < -x < 4$ et $\frac{1}{3} < \frac{1}{-y} < \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{3} < \frac{x}{y} < 2$

▶ Exercice n°5

$4 \leqslant x^2 \leqslant 25$, $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{5}$, $\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{x}\frac{1}{2}$, $11 \leqslant 3x^2-1 \leqslant 74$

$-\frac{3}{5} \leqslant \frac{2}{x}-1 \leqslant 0$, $\sqrt{2}-25 \leqslant \sqrt{x}-x^2 \leqslant \sqrt{5}-4$.

▶ Exercice n°6

a) $[3\,;4]$ b) $]4\,;7[$ c) $]-2\,;5]$

d) $\left[-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\right[$ e) $\left]\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\right]$ f) $]-\infty\,;2]$

g) $\left[-\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$ h) $\left]-\infty\,;\sqrt{3}\right[$

▶ Exercice n°7

Cela revient à déterminer l'intersection des deux intervalles, ce qui donne $[0{,}68\,;\,0{,}69]$.

▶ Exercice n°8

En s'aidant de schémas comme dans le cours :

a) $[2\,;4]$ b) $]4\,;6]$ c) $\{4\}$ (il n'y a que le nombre 4)

d) $\varnothing$ (intersection vide) e) $[3\,;5]$ f) $\left]\frac{1}{2}\,;2\right[$

g) $\left]-\frac{7}{4}\,;1\right[$ h) $\varnothing$ (intersection vide) i) $[3\,;10]$

j) $[2\,;+\infty[$ k) $]-7\,;14[$ l) $]7\,;12]$

▶ Exercice n°9

1. $\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\sqrt{a+b}\right] \times \left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{a+b}\right] = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{a+b}\right)^2$
$= \sqrt{a}^2+2\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}+\sqrt{b}^2-(a+b) = a+2\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}+b-a-b = 2\times\sqrt{a}\times\sqrt{b}$
Le résultat est positif car on a un produit de racines et il ne peut pas être nul car $a>0$ et $b>0$.
2. $\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{a+b}\right] > 0$ et $\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\sqrt{a+b}\right] \times \left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\sqrt{a+b}\right] > 0$ aussi d'après la question précédente.
On en déduit que $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)-\sqrt{a+b} > 0$ et donc que $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}$.