Géométrie analytique

▶ Exercice n°1

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = (5)\vec{i} + (7)\vec{j}$

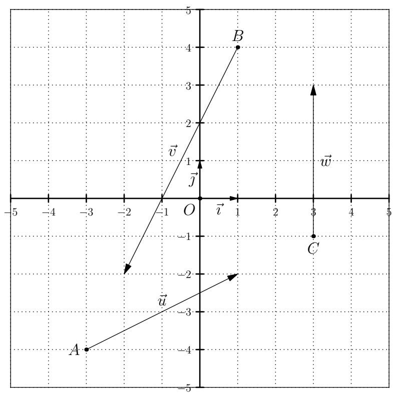
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = -4\vec{i} + 6\vec{j}$

3. $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u} = -3\vec{j}$

▶ Exercice n°2

$\vec{u}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$; $\vec{t}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$

▶ Exercice n°3



▶ Exercice n°4

$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$; $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$; $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{5}{4}\end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{w}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$; $3\vec{u}-2\vec{v}\begin{pmatrix}-14\\1\end{pmatrix}$; $4\vec{w}-\frac{1}{2}\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-\frac{7}{2}\end{pmatrix}$

▶ Exercice n°5

a) $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}2 & 8\\-1 & -4\end{vmatrix} = 2\times(-4)-(-1)\times 8 = 0$; colinéaires

b) $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{2}{3}\\3 & 4\end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\times 4 - 3\times(-\frac{2}{3}) = 0$; colinéaires

c) $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}-1 & 3\\0 & 4\end{vmatrix} = -1\times 4 - 0\times 3 = -4$; non colinéaires

d) $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}\sqrt{3} & 3\\-1 & \sqrt{3}\end{vmatrix} = \sqrt{3}\times\sqrt{3}-(-1)\times 3 = 6$; non colinéaires

e) $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}\sqrt{2} & -3\\-2 & 3\sqrt{2}\end{vmatrix} = \sqrt{2}\times 3\sqrt{2}-(-2)\times(-3) = 0$; colinéaires

f) $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}\sqrt{3}-2 & 1\\1 & \sqrt{3}+2\end{vmatrix} = (\sqrt{3}-2)\times(\sqrt{3}+2)-1\times 1 = (\sqrt{3})^2-2^2-1$
$= 3-4-1 = -2$; non colinéaires

▶ Exercice n°6

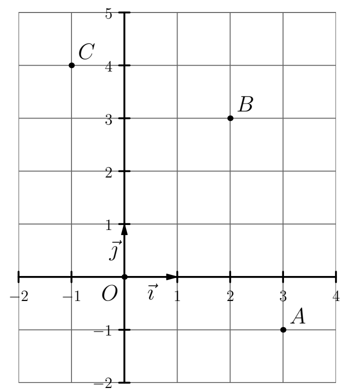
a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{100} = 10$

b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2+3^2} = \sqrt{2+9} = \sqrt{11}$

c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+(-1)^2} = \sqrt{\frac{9}{16}+1} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$

▶ Exercice n°7

1.



2. $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

3. $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ont les mêmes coordonnées, ils sont donc égaux. On peu en déduire que $OABC$ est un parallélogramme.

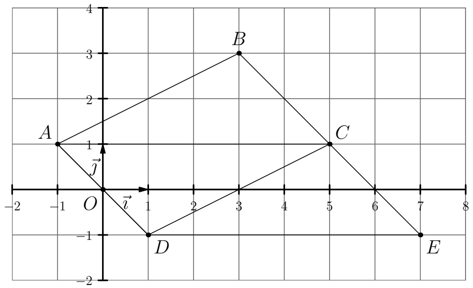
▶ Exercice n°8

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$

d) $3\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}12\\12\end{pmatrix}$ e) $-2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-20\\4\end{pmatrix}$ f) $2\,\overrightarrow{DB}-\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{13}{2}\\-\frac{19}{2}\end{pmatrix}$

▶ Exercice n°9

1.



2. $ABCD$ parallélogramme $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x_D+1\\y_D-1\end{pmatrix}=\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x_D+1=2\\y_D-1=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=1\\y_D=-1\end{cases}$

3.

▶ Exercice n°10

1. $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x_M-1\\y_M-4\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M-1=3\\y_M-4=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=4\\y_M=5\end{cases}$

2. $N\begin{pmatrix}\dfrac{x_A+x_C}{2}\\\dfrac{y_A+y_C}{2}\end{pmatrix}\Leftrightarrow N\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

3. $2\,\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}+3\,\overrightarrow{CP}\begin{pmatrix}3(x_P-4)\\3(y_P+5)\end{pmatrix}=\overrightarrow{0}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}6+3x_P-12=0\\2+3y_P+15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x_P=6\\3y_P=-17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_P=2\\y_P=-\frac{17}{3}\end{cases}$

▶ Exercice n°11

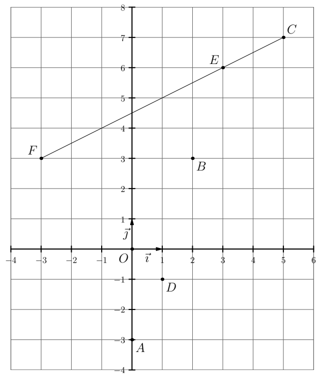
1. $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}4&12\\1&3\end{vmatrix}=4\times3-1\times12=0$; alignés

2. $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}1&\frac{3}{2}\\2&3\end{vmatrix}=1\times3-2\times\frac{3}{2}=0$; alignés

3. $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}\frac{9}{2}&9\\-3&-6\end{vmatrix}=\frac{9}{2}\times(-6)-(-3)\times9=0$; alignés

▶ Exercice n°12

1.



2. $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}x_E-2\\y_E-3\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\times2\\\frac{1}{2}\times6\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_E-2=1\\y_E-3=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_E=3\\y_E=6\end{cases}$

$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}x_F\\y_F+3\end{pmatrix}=3\,\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3\times(-1)\\3\times2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_F=-3\\y_F+3=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_F=-3\\y_F=3\end{cases}$

3. $\det(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CF})=\begin{vmatrix}-2&-8\\-1&-4\end{vmatrix}=-2\times(-4)-(-1)\times(-8)=0$

4. $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(2-0)^2+(3-(-3))^2}=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}$
$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}=\sqrt{(5-0)^2+(7-(-3))^2}=\sqrt{5^2+10^2}=\sqrt{125}$
$BD=\sqrt{(x_D-x_B)^2+(y_D-y_B)^2}=\sqrt{(-1-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5.$

▶ Exercice n°13

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4-(-2))^2 + (9-1)^2} = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{100} = 10$

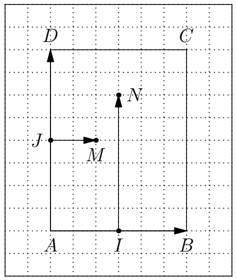
$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-6-(-2))^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-6-4)^2 + (4-9)^2} = \sqrt{(-10)^2+(-5)^2} = \sqrt{125}$

$AB^2 + AC^2 = 100 + 25 = 125 = BC^2$, donc ABC est bien rectangle en A

aire$= \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{10 \times 5}{2} = 25$ (unités d'aire).

▶ Exercice n°14



1. $I\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$; $J\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $M\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $N\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

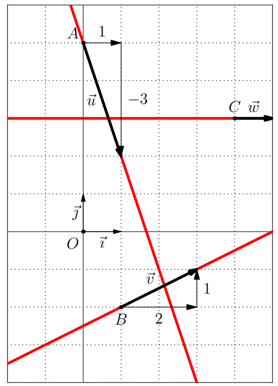
2. $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0$

   Donc A , M et N sont bien alignés.

   $\det(\overrightarrow{DM},\overrightarrow{BN}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

   Les droites (DM) et (BN) sont bien parallèles.

▶ Exercice n°15



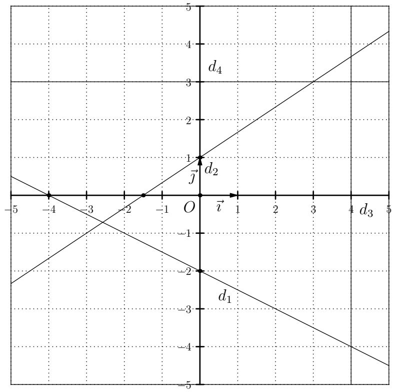
▶ Exercice n°16

d_1 : $x + 2y + 4 = 0$ - si $x = 0$, on a $y = -2$ et si $y = 0$, on a $x = -4$

d_2 : $2x - 3y + 3 = 0$ - si $x = 0$, on a $y = 1$ et si $y = 0$, on a $x = -1.5$

d_3 : $x = 4$ - droite verticale

d_4 : $y = 3$ - droite horizontale



▶ Exercice n°17

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -1 \\ y-5 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 3x - (y-5) \times (-1) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 5 = 0$

▶ Exercice n°18

a) $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 8 \\ y+3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 2(x+1) - 8(y+3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 8y - 22 = 0$

b) $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ y-\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(x+1) - (y-\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x - y + 2\sqrt{2} = 0$

▶ Exercice n°19

1. Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

   Un vecteur directeur de d' est $\vec{u}'\begin{pmatrix} 8\sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix}$

2. $\det(\vec{u},\vec{u}') = \begin{vmatrix} -4 & 8\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 4 \end{vmatrix} = -16 + 16 = 0$. Les vecteurs directeurs sont colinéaires, donc les droites sont alignées.

▶ Exercice n°20

Un vecteur directeur de d, et donc de d', est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d' \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+2 & -2 \\ y-1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 3(x+2) - (-2) \times (y-1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y + 4 = 0$

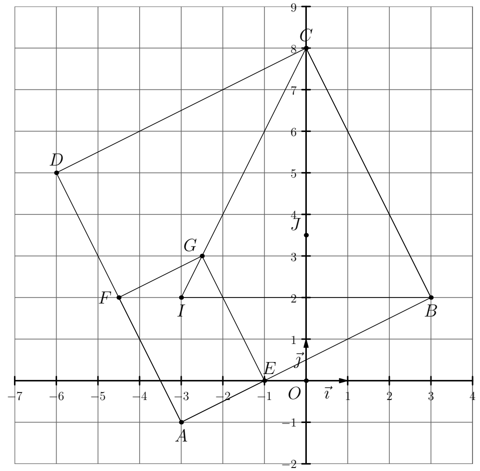
▶ Exercice n°21

1. • $F\begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_D}{2} \\ \dfrac{y_A + y_D}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow F\begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

   • $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E + 3 \\ y_E + 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 6 \\ \frac{1}{3} \times 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E + 3 = 2 \\ y_E + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -1 \\ y_E = 0 \end{cases}$

   • $FAEG$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{EG}\begin{pmatrix} x_G + 1 \\ y_G \end{pmatrix} = \overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} x_G + 1 = -\frac{3}{2} \\ y_G = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = -\frac{5}{2} \\ y_G = 3 \end{cases}$



2. $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (DE) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{DM},\overrightarrow{DE}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+6 & 5 \\ y-5 & -5 \end{vmatrix} = 0$

   $\Leftrightarrow -5(x+6) - 5(y-5) = 0 \Leftrightarrow -5x - 5y - 5 = 0$

   $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (CG) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CG}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -\frac{5}{2} \\ y-8 & -5 \end{vmatrix} = 0$

   $\Leftrightarrow -5x + \frac{5}{2}(y-8) = 0 \Leftrightarrow -5x + \frac{5}{2}y - 20 = 0$

3. $-5x_I - 5y_I - 5 = 15 - 10 - 5 = 0$, donc $I \in (DE)$

   $-5x_I + \frac{5}{2}y_I - 20 = 15 + 5 - 20 = 0$, donc $I \in (CG)$.

4. Les points F, I et B sont alignés car ils ont tous la même ordonnée.
   La droite (IB) est parallèle à l'axe des abscisses parce que I et B ont la même ordonnée.

5. $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+3 & 6 \\ y-2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

   $\Leftrightarrow 3(x+3) - 6(y-2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 6y + 21 = 0$

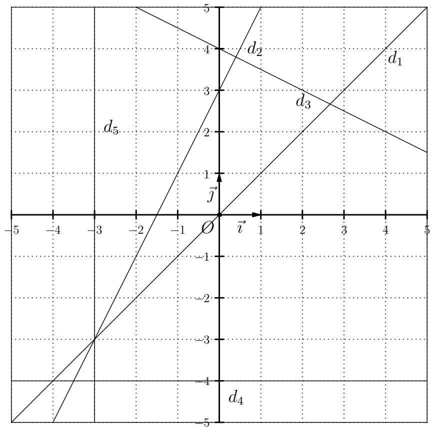
6. On doit avoir $x_J = 0$ puisque J est sur l'axe des ordonnées.
   De plus, les coordonnées de J doivent vérifier l'équation de $\mathcal{D}$: $3x_J - 6y_J + 21 = 0 \Leftrightarrow -6y_J + 21 = 0 \Leftrightarrow y_J = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$.

7. (IJ) est en fait la droite $\mathcal{D}$ qui est parallèle à (AB). Or $ABCD$ est un carré , donc les droites (IJ) et (BC) sont perpendiculaires.
   C et J ont la même abscisse, donc (CJ) est une droite verticale.
   I et B ont la même ordonnée, donc (IB) est une droite horizontale.
   On peut en déduire que les droites (CJ) et (IB) sont perpendiculaires.

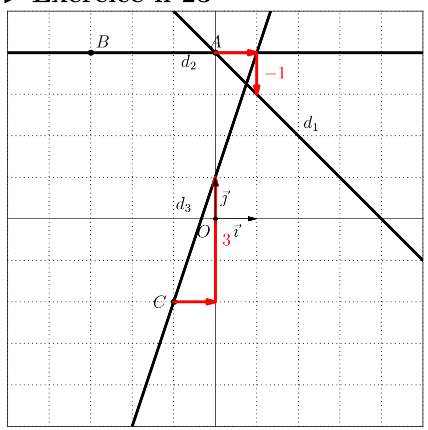
8. Dans le triangle IBC, J est sur la hauteur issue de I et sur la hauteur issue de C. C'est donc l'orthocentre du triangle IBC. On en déduit que (BJ) est la hauteur issue de B et donc que (BJ) et (CI) sont perpendiculaires.
Comme $I \in (CG)$, les droites (BJ) et (CG) sont bien perpendiculaires.

▶ Exercice n°22

$d_1 : y = x$; si $x = 0$ $y = 0$; si $x = 5$ $y = 5$
$d_2 : y = 2x + 3$; si $x = 0$ $y = 3$; si $x = 1$ $y = 5$
$d_3 : y = -\dfrac{1}{2}x + 4$; si $x = 0$ $y = 4$; si $x = 4$ $y = 2$
$d_4 : y = -4$; droite horizontale
$d_5 : x = -3$; droite verticale



▶ Exercice n°23



- A partir du point A, on se décale horizontalement d'une unité, puis de la valeur du coefficient directeur verticalement pour obtenir un deuxième point de la droite.
- Le coefficient directeur étant nul, la droite est horizontale.
- A partir du point C, on se décale horizontalement d'une unité, puis de la valeur du coefficient directeur verticalement pour obtenir un deuxième point de la droite.

▶ Exercice n°24

a) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1}{4}$; $y_A = \dfrac{1}{4}x_A + p \Leftrightarrow -3 = \dfrac{1}{4} \times (-1) + p \Leftrightarrow p = -\dfrac{11}{4}$
Équation : $y = \frac{1}{4}x - \frac{11}{4}$
b) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\dfrac{1}{5}$; $y_A = -\dfrac{1}{5}x_A + p \Leftrightarrow 2 = -\dfrac{1}{5} \times 4 + p \Leftrightarrow p = \dfrac{14}{5}$
Équation : $y = -\frac{1}{5}x + \frac{14}{5}$
c) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\dfrac{2}{11}$; $y_A = -\dfrac{2}{11}x_A + p \Leftrightarrow -2 = -\dfrac{2}{11} \times (-5) + p \Leftrightarrow p = -\dfrac{32}{11}$
Équation : $y = -\frac{2}{11}x - \frac{32}{11}$
d) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \sqrt{2}$; $y_A = \sqrt{2}x_A + p \Leftrightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2} \times 1 + p \Leftrightarrow p = 2\sqrt{2}$
Équation : $y = \sqrt{2}x + 2\sqrt{2}$
e) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3}{2}$; $y_A = \dfrac{3}{2}x_A + p \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{2} \times 0 + p \Leftrightarrow p = \dfrac{1}{4}$
Équation : $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$
f) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\dfrac{1}{3}$; $y_A = -\dfrac{1}{3}x_A + p \Leftrightarrow -1 = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{5}{2} + p \Leftrightarrow p = -\dfrac{1}{6}$
Équation : $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$

▶ Exercice n°25

a) $d' : y = -2x + p$; $y_A = -2x_A + p \Leftrightarrow 0 = 6 + p \Leftrightarrow p = -6$
Équation : $y = -2x - 6$
b) $d' : y = -\dfrac{3}{2}x + p$; $y_A = -\dfrac{3}{2}x_A + p \Leftrightarrow 1 = 3 + p \Leftrightarrow p = -2$
Équation : $y = -\dfrac{3}{2}x - 2$
c) $d' : y = y_A$ (droite horizontale)
Équation : $y = 2$
d) $d' : x = x_A$ (droite verticale)
Équation : $x = 7$

▶ **Exercice n°26**

Première analyse du problème :

1. $15n + 22p = 362$
2. si $n = 25$ alors on aurait déjà $15n = 375$ ce qui dépasse 362.

Approche graphique :

1. On doit avoir $15n + 22p = 362 \Leftrightarrow 15n + 22p - 362 = 0$. Autrement dit, les points d'abscisse n et d'ordonnée p sont sur la droite d'équation cartésienne $15x + 22y - 362 = 0$
2. Non, car si $n = 5$ et $p = 13$ alors $15n + 22p = 361$ et non pas 362.

Approche algorithmique :

```
Variables: x,y
DEBUT_ALGORITHME
  POUR x ALLANT_DE 0 A 24
    y ← (362 − 15x)/22
    SI (y est un entier) ALORS
      AFFICHER x
      FIN_SI
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```