

Fonctions numériques

► Exercice n°1

1. image de 3 = $f(3) = \frac{3+1}{3-2} = 4$

image de 5 = $f(5) = \frac{5+1}{5-2} = 2$

2. Ce sont les réels x dans $]2; +\infty[$ tels que $f(x) = 3$.

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} = 3 \Leftrightarrow x+1 = 3(x-2) \Leftrightarrow x+1 = 3x-6 \Leftrightarrow 1+6 =$$

$$3x-x \Leftrightarrow 7 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \text{ qui est bien dans }]2; +\infty[.$$

$\frac{7}{2}$ est le seul antécédent de 3 par f .

► Exercice n°2

1. $f(-1) = -8$ (ordonnée du point de la courbe d'abscisse -1)

$f(0) = -3$ (ordonnée du point de la courbe d'abscisse 0)

$f(1) = 0$ (ordonnée du point de la courbe d'abscisse 1)

2. Les antécédents de -3 par f sont 0 et 4 (abscisses des points de la courbe d'ordonnée -3)

3. $f(x)$ varie dans $[-8; 1]$ quand x varie dans $[-1; 5]$ car cela correspond aux ordonnées des points de la courbe.

► Exercice n°3

- Proposition 1 : vraie, car f est décroissante sur $[0; 4]$
- Proposition 2 : fausse. $f(-3)$ n'existe pas car f n'est définie que sur $[0; 7]$
- Proposition 3 : fausse. $f(x)$ ne peut s'annuler qu'une seule fois : sur l'intervalle $[0; 4]$ quand $f(x)$ passe de 2 à -3 .
- Proposition 4 : vraie. Pour tout x de $[0; 7]$, on a bien $f(x) \geq -3$.

► Exercice n°4

Déterminer si la fonction f est paire, impaire ou ni l'une ni l'autre dans les cas suivants

1. \mathbb{R} est symétrique par rapport à 0 et pour tout x , $f(-x) = 3(-x) = -3x = -f(x)$. Donc f est impaire.
2. \mathbb{R} est symétrique par rapport à 0 et pour tout x , $f(-x) = 4 - (-x)^2 = 4 - x^2 = f(x)$. Donc f est paire.
3. \mathbb{R} est symétrique par rapport à 0 et pour tout x , $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$ qui est ni égal à $f(x)$, ni égal à $-f(x)$. Donc, f est ni paire, ni impaire.

4. \mathbb{R} est symétrique par rapport à 0 et pour tout x , $f(-x) = \frac{3(-x)}{(-x)^2 + 4} = -\frac{3x}{x^2 + 4} = -f(x)$. Donc f est impaire.

5. $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ n'est pas symétrique par rapport à 0, donc f est ni paire, ni impaire.

► Exercice n°5

x	-8	-2	0	2	8
$f(x)$	-5	1	-2	1	-5

► Exercice n°6

x	-6	-3	0	3	6
$f(x)$	-3	1	0	-1	3

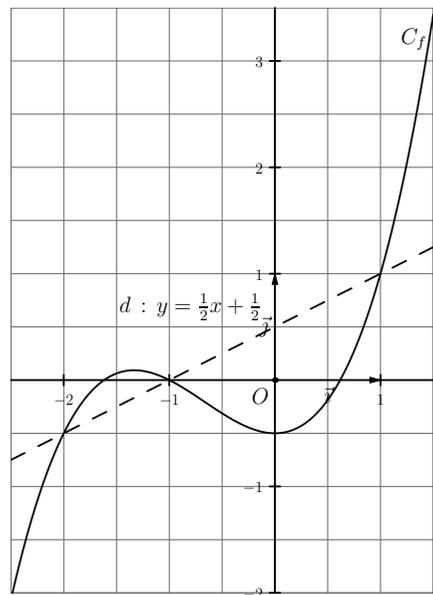
► Exercice n°7

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 + 4$.

1. image de $-1 = f(-1) = 3 \times (-1)^2 + 4 = 7$.
2. Ce sont les réels x tels que $f(x) = 16 \Leftrightarrow 3x^2 + 4 = 16 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$. 2 et -2 sont les antécédents de 16 par f .
3. \mathbb{R} est symétrique par rapport à 0 et pour tout x , $f(-x) = 3(-x)^2 + 4 = 3x^2 + 4 = f(x)$. Donc f est bien paire.
4. a) $f(b) - f(a) = (3b^2 + 4) - (3a^2 + 4) = 3b^2 + 4 - 3a^2 - 4 = 3b^2 - 3a^2 = 3(b^2 - a^2) = 3(b-a)(b+a)$.
 b) Pour tous a et b dans $[0; +\infty[$ tels que $b - a > 0$, on a $f(b) - f(a) = 3 \underbrace{(b-a)}_+ \times \underbrace{(b+a)}_+ > 0$. Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$.
car $b > 0$ et $a > 0$
- c) Par symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées, f doit être décroissante sur $]-\infty; 0]$.
- d)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	\swarrow $f(0) = 4$ \searrow		

► **Exercice n°8**



- $S = \{1\}$
 - $S = \{-2; 0\}$
 - $S = \{-2; -1; 1\}$ (abscisses des points d'intersection avec la droite d)
- $S = [1; \frac{3}{2}]$
 - $S =]-\frac{5}{2}; -2[$
 - $S = [-\frac{5}{2}; -2] \cup \{0\}$
 - $S = [-2; -1] \cup [1; \frac{3}{2}]$

► **Exercice n°9**

Cela revient à déterminer l'équation réduite de la droite d passant par le point A d'abscisse $x_A = 1$ et d'ordonnée $y_A = -2$ et par le point B d'abscisse $x_B = 4$ et d'ordonnée $y_B = 7$.

On a donc $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7 - (-2)}{4 - 1} = 3$. L'équation réduite de d est donc de

la forme $y = 3x + p$.

On doit avoir $y_A = 3x_A + p \Leftrightarrow -2 = 3 \times 1 + p \Leftrightarrow p = -5$.

L'équation réduite de d est $y = 3x - 5$ et f est définie par $f(x) = 3x - 5$.

► **Exercice n°10**

- Cela revient à déterminer l'équation réduite de la droite d passant par le point A d'abscisse $x_A = 0$ et d'ordonnée $y_A = 32$ et par le point B d'abscisse $x_B = 100$ et d'ordonnée $y_B = 212$.

On a donc $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = 1,8$. L'équation réduite de d est donc de la forme $y = 1,8x + p$.

On doit avoir $y_A = 1,8x_A + p \Leftrightarrow 32 = 1,8 \times 0 + p \Leftrightarrow p = 32$.

L'équation réduite de d est $y = 1,8x + 32$ et f est définie par $f(x) = 1,8x + 32$.

- Valeur en degrés fahrenheit de 22° celsius = $f(22) = 1,8 \times 22 + 32 = 71,6$

► **Exercice n°11**

Pour $x > -2$, on étudie le signe de $f(x) - 5$:

$$f(x) - 5 = \frac{5x}{x+2} - 5 \times \frac{x+2}{x+2} = \frac{5x - 5x - 10}{x+2} = \frac{\overbrace{-10}^-}{\underbrace{x+2}^+} < 0$$

Donc, C_f est en dessous de la droite D d'équation $y = 5$ sur $] -2; +\infty[$.

► **Exercice n°12**

Pour $x < -1$, on étudie le signe de $f(x) - x$:

$$f(x) - x = \frac{x}{x+1} - x \times \frac{x+1}{x+1} = \frac{x - x^2 - x}{x+1} = \frac{\overbrace{-x^2}^-}{\underbrace{x+1}^-} > 0$$

Donc, C_f est au dessus de la droite D d'équation $y = x$ sur $] -\infty; -1[$.

► **Exercice n°13**

- Au bout d'un an : $P(1) = \frac{50 + 60}{1 + 0,05} \approx 104,8$ milliers

Au bout de 50 ans : $P(50) = \frac{50 + 60 \times 50}{1 + 0,05 \times 50} \approx 871,4$ milliers

- Cela revient à chercher t tel que $P(t) = 4 \times 50 \Leftrightarrow \frac{50 + 60t}{1 + 0,05t} = 200 \Leftrightarrow 50 + 60t = 200 + 10t \Leftrightarrow 60t - 10t = 200 - 50 \Leftrightarrow 50t = 150 \Leftrightarrow t = 3$ ans.

-

```

Variables: t
1: DEBUT_ALGORITHME
2:   t ← 5
3:   TANT_QUE (t ≤ 100) FAIRE
4:     AFFICHER (50 + 60t)/(1 + 0,05t)
5:     t ← t + 5
6:   FIN_TANT_QUE
7: FIN_ALGORITHME

```

$$4. \text{ Pour tout } t > 0, P(t) - 1200 = \frac{50 + 60t}{1 + 0,05t} - 1200 \times \frac{1 + 0,05t}{1 + 0,05t} =$$

$$\frac{50 + 60t - 1200 - 60t}{1 + 0,05t} = \frac{-1150}{1 + 0,05t} < 0. \text{ On en déduit que } P(t) \text{ est toujours}$$

inférieur à 1200 et que le nombre de poissons ne dépassera jamais 1200 milliers.

► Exercice n°14

1. Si $x = 25$, on doit avoir $25 + y + 25 = 360 \Leftrightarrow y = 310$. On a alors, $S(x) = x \times y = 25 \times 310 = 7750 \text{ m}^2$.

Si $x = 42$, on doit avoir $42 + y + 42 = 360 \Leftrightarrow y = 276$. On a alors, $S(x) = x \times y = 42 \times 276 = 11592 \text{ m}^2$.

2. On doit avoir $x + y + x = 360 \Leftrightarrow y = 360 - 2x$.

Et donc, $S(x) = x \times y = x(360 - 2x) = -2x^2 + 360x$.

3. $S(x) = -2[x^2 - 180x] = -2[(x - 90)^2 - 90^2] = -2[(x - 90)^2 - 8100] = -2(x - 90)^2 + 16200$. Il faut $a = 90$ et $b = 16200$.

4. $-2(x - 90)^2$ est toujours négatif et sera maximal quand sa valeur sera nulle, c'est à dire pour $x = 90$. $S(x) = -2(x - 90)^2 + 16200$ sera donc aussi maximal pour $x = 90$ et le maximum sera de 16200 m^2 .

► Exercice n°15

1. Dans le triangle rectangle AIM , on doit avoir $IM^2 + IA^2 = AM^2 \Leftrightarrow 2IM^2 = x^2 \Leftrightarrow IM^2 = \frac{x^2}{2}$.

Dans le triangle rectangle MJB , on doit avoir $MJ^2 + BJ^2 = BM^2 \Leftrightarrow 2MJ^2 = (10 - x)^2 \Leftrightarrow MJ^2 = \frac{(10 - x)^2}{2}$.

2. On a $\widehat{AMI} = 45^\circ$ et $\widehat{BMJ} = 45^\circ$ et on doit avoir $\widehat{AMI} + \widehat{IMJ} + \widehat{BMJ} = 180^\circ$. On en déduit que $\widehat{IMJ} = 90^\circ$ et que IMJ est aussi un triangle rectangle.

3. Dans le triangle rectangle IMJ , on doit avoir $IJ^2 = IM^2 + MJ^2 = \frac{x^2}{2} +$

$$\frac{(10 - x)^2}{2} = \frac{x^2 + 100 - 20x + x^2}{2} = \frac{2x^2 - 20x + 100}{2} = x^2 - 10x + 50. \text{ Donc,}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 50}$$

4. $f(x) = \sqrt{(x - 5)^2 - 25 + 50} = \sqrt{(x - 5)^2 + 25}$. Il faut $a = 5$ et $b = 25$.

5. $(x - 5)^2$ est toujours positif et sera minimal quand sa valeur sera nulle, c'est à dire pour $x = 5$. IJ sera donc aussi minimale pour $x = 5$, c'est à dire quand M est le milieu de $[AB]$ et sa valeur minimale sera égale à $\sqrt{25} = 5$.

6. $IJ = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 5)^2 + 25} = 6 \Rightarrow (x - 5)^2 + 25 = 36 \Rightarrow (x - 5)^2 = 11 \Rightarrow x - 5 = \sqrt{11}$ ou $x - 5 = -\sqrt{11} \Rightarrow x = 5 + \sqrt{11} \approx 8,31$ ou $x = 5 - \sqrt{11} \approx 1,68$. Les deux valeurs conviennent.

► Exercice n°16

1. « Si f est une fonction croissante sur \mathbb{R} alors il existe au moins un x tel que $f(x)$ soit négatif ».

2. « Si pour tout x , $f(x)$ est positif alors f est croissante sur \mathbb{R} ».

3. La proposition est fausse. Contre-exemple : f définie par $f(x) = x$ est croissante sur \mathbb{R} , mais $f(x)$ est négatif si $x < 0$.

4. La réciproque est fausse. Contre-exemple : f définie par $f(x) = x^2$ n'est pas croissante sur \mathbb{R} .