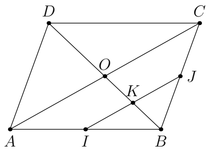
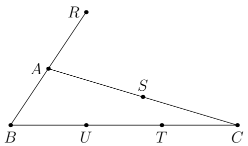
Configurations du plan

▶ Exercice n°1



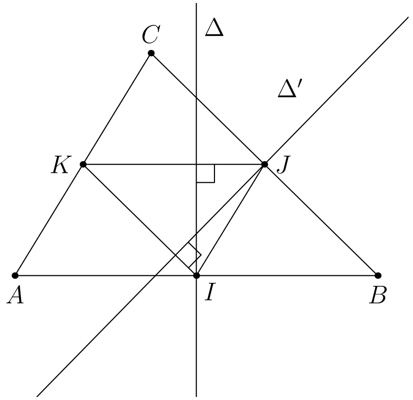
1. D'après le théorème des milieux dans le triangle ABD, $(OI) /\!/ (AD)$. Et comme $(BJ) /\!/ (AD)$, on a $(OI) /\!/ (BJ)$.
   D'après le théorème des milieux dans le triangle BCD, $(OJ) /\!/ (CD)$. Et comme $(BI) /\!/ (CD)$, on a $(OJ) /\!/ (BI)$.
   On peut en conclure que $OJBI$ est un parallélogramme.
2. $OJBI$ étant un parallélogramme ses diagonales se coupent en leur milieu. Or K est justement l'intersection des diagonales. K est donc bien le milieu de $[IJ]$

▶ Exercice n°2



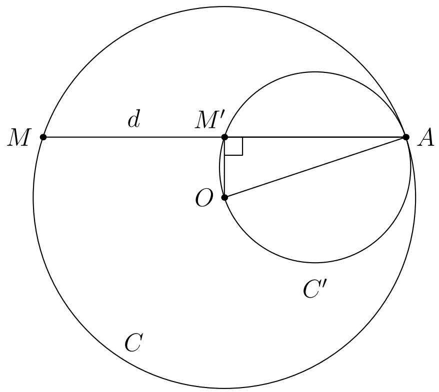
D'après le théorème des milieux dans le triangle BRT, on a $(AU) /\!/ (RT)$.
D'après le théorème des milieux dans le triangle AUC, on a $(ST) /\!/ (AU)$.
On en conclut que $(RT) /\!/ (ST)$ et donc que les points R, S et T sont alignés.

▶ Exercice n°3



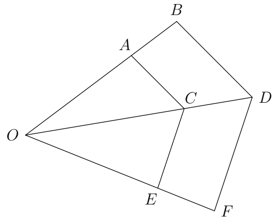
1. D'après le théorème des milieux dans le triangle ABC, on a $(KJ) /\!/ (AB)$. Δ étant la hauteur du triangle IJK issue de I, on a $\Delta \perp (KJ)$. On peut en déduire que $\Delta \perp (AB)$. Et comme Δ passe par le milieu de $[AB]$, Δ est la médiatrice de $[AB]$.
2. D'après le théorème des milieux dans le triangle ABC, on a $(KI) /\!/ (BC)$. Δ' étant la hauteur du triangle IJK issue de J, on a $\Delta' \perp (KI)$. On peut en déduire que $\Delta' \perp (BC)$. Et comme Δ' passe par le milieu de $[BC]$, Δ' est la médiatrice de $[BC]$.
3. L'orthocentre du triangle IJK est l'intersection de Δ et Δ' qui sont aussi deux médiatrices du triangle ABC ; il est donc aussi le centre du cercle circonscrit à ABC.

▶ Exercice n°4



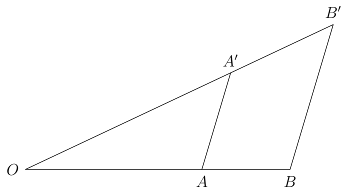
1. M' est sur le cercle de diamètre $[OA]$ donc, d'après le théorème de l'angle droit, le triangle AOM' est rectangle en M'.
2. Le triangle OAM est isocèle en O, donc sa hauteur issue de O qui est (OM') est aussi la médiatrice du segment $[AM]$.

▶ Exercice n°5



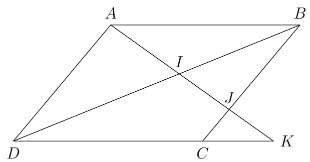
D'après le théorème de Thalès dans le triangle OBD : $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$
D'après le théorème de Thalès dans le triangle ODF : $\frac{OC}{OD}=\frac{OE}{OF}$
On peut en déduire que $\frac{OA}{OB}=\frac{OE}{OF}$ et donc que, d'après le 2e théorème de Thalès, $(AE)\,/\!/\,(BF)$.

▶ Exercice n°6



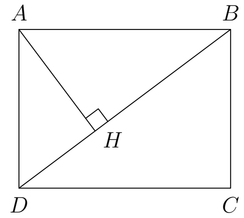
D'après le théorème de Thalès dans le triangle OBB' : $\frac{OA'}{OB'}=\frac{AA'}{BB'}$
$\Leftrightarrow \frac{OA'}{OA'+9}=\frac{8}{12} \Leftrightarrow 12\,OA'=8\,OA'+72 \Leftrightarrow 4\,OA'=72$.
On en déduit que $OA'=18$.

▶ Exercice n°7



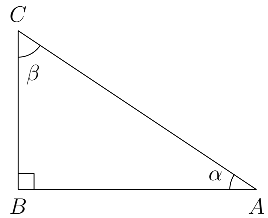
D'après le théorème de Thalès dans la configuration formée par les triangles IAD et IJB : $\frac{IJ}{IA}=\frac{IB}{ID}$.
D'après le théorème de Thalès dans la configuration formée par les triangles IAB et IDK : $\frac{IA}{IK}=\frac{IB}{ID}$.
On en déduit que $\frac{IJ}{IA}=\frac{IA}{IK}$ et donc que $IA^2=IJ\times IK$.

▶ Exercice n°8



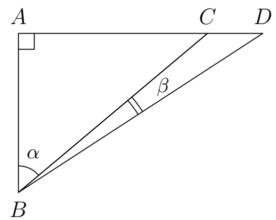
1. D'après le théorème de Pythagore dans la triangle rectangle ABD :
   $BD^2=8^2+6^2=100$. On en déduit que $BD=10$.
2. L'aire du triangle BDA est égale à $\frac{AB\times AD}{2}=\frac{8\times 6}{2}=24$
3. L'aire du triangle BDA est aussi égale à $\frac{BD\times AH}{2}$. Donc, on doit avoir $\frac{BD\times AH}{2}=24 \Leftrightarrow \frac{10\times AH}{2}=24 \Leftrightarrow 5\times AH=24$. On en déduit que $AH=4{,}8$.

▶ Exercice n°9



- $\tan\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{2}{3}$
- $AC^2=AB^2+BC^2=3^2+2^2=13$. Donc, $AC=\sqrt{13}$
- $\cos\beta=\frac{BC}{AC}=\frac{2}{\sqrt{13}}$
- $\cos\alpha=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{\sqrt{13}}$

▶ Exercice n°10



$\tan\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{AC}{3}\Leftrightarrow AC=3\tan 50°$
$\tan(\alpha+\beta)=\frac{AD}{AB}=\frac{AD}{3}\Leftrightarrow AD=3\tan 57°$
$CD=AD-AC=3\tan 57°-3\tan 50°\approx 1{,}045$