Calcul numérique et algébrique

▶ Exercice n°1

	entier	décimal	rationnel	irrationnel
3,5		$\times$	$\times$	
$\dfrac{42}{7}$	$\times$	$\times$	$\times$	
$\dfrac{3}{4}$		$\times$	$\times$	
$\dfrac{6}{7}$			$\times$	
$\sqrt{5}$				$\times$
$\sqrt{81}$	$\times$	$\times$	$\times$	
0,00032		$\times$	$\times$	

▶ Exercice n°2

1. 75 est un multiple de 5.
2. 11 est un diviseur de 99.
3. 3 est un diviseur de 243.

▶ Exercice n°3

1. par 2.
2. par 5.
3. par 3.
4. par9.

▶ Exercice n°4

1. 54, 108, 162, 216, 270
2. 90, 180, 270, 380, 450
3. Au bout de 270 minutes.

▶ Exercice n°5

	V	F
$3^3 \times 6$ est une décomposition de 162 en produit de facteurs premiers		$\times$
$2^4 \times 5$ est une décomposition de 80 en produit de facteurs premiers	$\times$	
$\dfrac{18}{24}$ est une fraction irréductible		$\times$
$\dfrac{13}{24}$ est une fraction irréductible	$\times$	
$\dfrac{25}{26} = \dfrac{5}{6}$		$\times$

▶ Exercice n°6

a) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{2} = \dfrac{2}{6} + \dfrac{15}{6} = \dfrac{17}{6}$

b) $\dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{3}{12} + \dfrac{16}{12} = \dfrac{19}{12}$

c) $-\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{6} = -\dfrac{4}{6} + \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{6}$

d) $\dfrac{5}{12} - \dfrac{5}{8} = \dfrac{10}{24} - \dfrac{15}{24} = -\dfrac{5}{24}$

e) $\dfrac{7}{8} \times \dfrac{6}{13} = \dfrac{7 \times 3}{4 \times 13} = \dfrac{21}{52}$

f) $5 - \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{30}{6} - \left(\dfrac{2}{6} + \dfrac{15}{6}\right) = \dfrac{13}{6}$

g) $\dfrac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}} = \dfrac{1}{\frac{5}{6}} = \dfrac{6}{5}$

h) $\dfrac{-3}{\frac{2}{3} - \frac{8}{7}} = \dfrac{-3}{\frac{14}{21} - \frac{24}{21}} = \dfrac{-3}{-\frac{10}{21}} = 3 \times \dfrac{21}{10} = \dfrac{63}{10}$

i) $\dfrac{\frac{6}{35}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{6}{35} \times \dfrac{5}{3} = \dfrac{2}{7}$

▶ Exercice n°7

a) $3x + \dfrac{1}{x} = 3x \times \dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{3x^2 + 1}{x}$

b) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{x} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{x} \times \dfrac{x}{x} = \dfrac{1 + 4x}{x^2}$

c) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{2}{x}\times\dfrac{2}{2}-\dfrac{x}{2}\times\dfrac{x}{x}=\dfrac{4-x^2}{2x}$

d) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=\dfrac{1}{a}\times\dfrac{b}{b}+\dfrac{2}{b}\times\dfrac{a}{a}=\dfrac{b+2a}{ab}$

e) $\dfrac{b+1}{ab}-\dfrac{4}{a}=\dfrac{b+1}{ab}-\dfrac{4}{a}\times\dfrac{b}{b}=\dfrac{1-3b}{ab}$

f) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{x+1}\times\dfrac{2}{2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{x+1}{x+1}=\dfrac{x-1}{2(x+1)}$

▶ Exercice n°8

a) $\overbrace{(x+7)^2}^{\text{forme } (a+b)^2}=x^2+2\times x\times 7+7^2=x^2+14x+49$

b) $\overbrace{(3x+4)^2}^{\text{forme } (a+b)^2}=(3x)^2+2\times(3x)\times 4+4^2=9x^2+24x+16$

c) $\overbrace{(x-6)^2}^{\text{forme } (a-b)^2}=x^2-2\times x\times 6+6^2=x^2-12x+36$

d) $\overbrace{(1-4x)^2}^{\text{forme } (a-b)^2}=1^2-2\times 1\times(4x)+(4x)^2=1-8x+16x^2$

e) $\overbrace{\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)^2}^{\text{forme } (a+b)^2}=\left(\dfrac{1}{2}x\right)^2+2\times\dfrac{1}{2}x\times 1+1^2=\dfrac{1}{4}x^2+x+1$

f) $\overbrace{(2x-7)(2x+7)}^{\text{forme } (a-b)(a+b)}=(2x)^2-7^2=4x^2-49$

g) $\overbrace{\left(\dfrac{1}{3}x-4\right)\left(\dfrac{1}{3}x+4\right)}^{\text{forme } (a-b)(a+b)}=\left(\dfrac{1}{3}x\right)^2-4^2=\dfrac{1}{9}x^2-16$

h) $\overbrace{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2}^{\text{forme } (a+b)^2}=x^2+2\times x\times\dfrac{1}{x}+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$

i) $\overbrace{(3-\sqrt{2})^2}^{\text{forme } (a-b)^2}=3^2-2\times 3\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=9-6\sqrt{2}+2=11-6\sqrt{2}$

j) $\overbrace{\left(\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\right)^2}^{\text{forme } (a-b)^2}=(\sqrt{3})^2-2\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=3-\sqrt{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{12}{4}-\sqrt{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{4}-\sqrt{3}$

k) $\overbrace{(\sqrt{5}-2\sqrt{2})(\sqrt{5}+2\sqrt{2})}^{\text{forme } (a-b)(a+b)}=(\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2=5-4\times 2=-3$

l) $\overbrace{(3x+1)^2}^{\text{forme } (a+b)^2}+\overbrace{(5x-4)^2}^{\text{forme } (a-b)^2}=(3x)^2+2\times(3x)\times 1+1^2+(5x)^2-2\times(5x)\times 4+4^2=9x^2+6x+1+25x^2-10x+16=34x^2-34x+17$

▶ Exercice n°9

a) $x^2-49=\overbrace{x^2-7^2}^{\text{forme } a^2-b^2}=(x-7)(x+7)$

b) $x^2-\dfrac{1}{4}=\overbrace{x^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}^{\text{forme } a^2-b^2}=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

c) $4x^2-1=\overbrace{(2x)^2-1^2}^{\text{forme } a^2-b^2}=(2x-1)(2x+1)$

d) $\dfrac{9}{4}x^2-16=\overbrace{\left(\dfrac{3}{2}x\right)^2-4^2}^{\text{forme } a^2-b^2}=\left(\dfrac{3}{2}x-4\right)\left(\dfrac{3}{2}x+4\right)$

e) $x^2-3=\overbrace{x^2-(\sqrt{3})^2}^{\text{forme } a^2-b^2}=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

f) $(x+1)^2-4=\overbrace{(x+1)^2-2^2}^{\text{forme } a^2-b^2}=(x+1-2)(x+1+2)=(x-1)(x+3)$

g) $\overbrace{(2x-1)^2-(3x+2)^2}^{\text{forme } a^2-b^2}=((2x-1)-(3x+2))((2x-1)+(3x+2))=(-x-3)(5x+1)$

h) $x^2+2x+1=\overbrace{x^2+2\times x\times 1+1^2}^{\text{forme } a^2+2ab+b^2}=(x+1)^2$

i) $x^2+6x+9=\overbrace{x^2+2\times x\times 3+3^2}^{\text{forme } a^2+2ab+b^2}=(x+3)^2$

j) $9x^2 - 12x + 4 = \overbrace{(3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2}^{\text{forme } a^2-2ab+b^2} = (3x-2)^2$

k) $9x^2 - 6x + 1 = \overbrace{(3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2}^{\text{forme } a^2-2ab+b^2} = (3x-1)^2$

l) $\dfrac{1}{4}x^2 - x + 1 = \overbrace{\left(\dfrac{1}{2}x\right)^2 - 2 \times \dfrac{1}{2}x \times 1 + 1^2}^{\text{forme } a^2-2ab+b^2} = \left(\dfrac{1}{2}x - 1\right)^2$

▶ Exercice n°10

a) $x^2 - x = \underline{x} \times x - \underline{x} \times 1 = \underline{x}(x-1)$

b) $3(x+1)+(x+1)^2 = 3\underline{(x+1)}+\underline{(x+1)}(x+1) = \underline{(x+1)}(3+x+1) = (x+1)(x+4)$

c) $(6x+3) - 4x(2x+1) = 3\underline{(2x+1)} - 4x\underline{(2x+1)} = \underline{(2x+1)}(3-4x)$

d) $3(2x-1) - (x+2)(4x-2) = 3\underline{(2x-1)} - (x+2) \times 2 \times \underline{(2x-1)}$
$= \underline{(2x-1)}(3-2x-4) = (2x-1)(-2x-1)$

e) $4x^3 - 6x^2 = \underline{2x^2} \times 2x - 3 \times \underline{2x^2} = \underline{2x^2}(2x-3)$

f) $(3x+3)^2 - x(x+1) = 3 \times \underline{(x+1)} \times (3x+3) - x \times \underline{(x+1)}$
$= \underline{(x+1)}(9x+9-x) = (x+1)(8x+9)$

▶ Exercice n°11

a) $x^2-4+(2x+3)(x-2) = (x-2)(x+2)+(2x+3)(x-2) = (x-2)(x+2+2x+3)$
$= (x-2)(3x+5)$

b) $4x(x^2-9) - x(x-3) = 4x(x-3)(x+3) - x(x-3) = x(x-3)\left(4(x+3)-1\right)$
$= x(x-3)(4x+11)$

c) $(2x+5)(4+2x) + 4 - x^2 = (2x+5) \times 2 \times (2+x) + (2-x)(2+x)$
$= (2+x)\left(2(2x+5)+2-x\right) = (2+x)(4x+10+2-x) = (2+x)(3x+12)$

d) $(x-3)(2x-1)^2 - (4x-12) = (x-3)(2x-1)^2 - 4(x-3)$
$= (x-3)\left((2x-1)^2 - 2^2\right) = (x-3)(2x-1-2)(2x-1+2)$
$= (x-3)(2x-3)(2x+1)$

▶ Exercice n°12

1. $(x-1)^2 - 4 = x^2 - 2x + 1 - 4 = x^2 - 2x - 3$. Donc, $x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$
$= (x-1)^2 - 2^2 = (x-1-2)(x-1+2) = (x-3)(x+1)$.
2. $x^2+2x-8 = (x+1)^2-9$. Donc, $x^2+2x-8 = (x+1)^2-3^2 = (x+1-3)(x+1+3)$
$= (x-2)(x+4)$.
3. $x^2-4x-5 = (x-2)^2-9$. Donc, $x^2-4x-5 = (x-2)^2-3^2 = (x-2-3)(x-2+3)$
$= (x-5)(x+1)$.

▶ Exercice n°13

a) $10^{-8} \times 10^5 = 10^{-3}$ b) $10^{11} \times 10^{-4} = 10^7$ c) $\dfrac{10^{-4}}{10^{-3}} = 10^{-1}$

d) $\dfrac{10^4}{10^{-7}} \times 10^{-6} = 10^5$ e) $0{,}003 \times 10^{-5} = 3 \times 10^{-8}$ f) $123{,}12 \times 10^{-7} = 1{,}2312 \times 10^{-5}$

▶ Exercice n°14

1. $2^4 \times 2^8 \times \left(2^{-5}\right)^3 = 2^{4+8} \times 2^{-15} = 2^{12-15} = 2^{-3}$
2. $\dfrac{3^{-24} \times \left(3^4\right)^7}{3^5} = \dfrac{3^{-24} \times 3^{28}}{3^5} = \dfrac{3^4}{3^5} = 3^{-1}$
3. $\left(-3^4\right)^2 \times 9^6 \times 27^{-2} = 3^8 \times \left(3^2\right)^6 \times \left(3^3\right)^{-2} = 3^8 \times 3^{12} \times 3^{-6} = 3^{14}$
4. $\dfrac{\left(3^3 \times 10^{-3}\right)^2}{3 \times 10^{-8}} = \dfrac{\left(3^3\right)^2}{3} \times \dfrac{\left(10^{-3}\right)^2}{10^{-8}} = \dfrac{3^6}{3} \times \dfrac{10^{-6}}{10^{-8}} = 3^5 \times 10^2$
5. $\dfrac{(-18)^2 \times 5}{15^2 \times 3} = \dfrac{\left(3^2 \times 2\right)^2 \times 5}{(3 \times 5)^2 \times 3} = \dfrac{3^4 \times 2^2 \times 5}{3^2 \times 5^2 \times 3} = \dfrac{3^4}{3^3} \times 2^2 \times \dfrac{5}{5^2} = 3 \times 2^2 \times 5^{-1}$

▶ Exercice n°15

a) $1{,}58 \times 10^3$ b) $1{,}3533 \times 10^{-1}$ c) 2×10^{-8}

d) $7{,}1 \times 10^3$ e) $1{,}2312 \times 10^5$ f) $-1{,}34 \times 10^{-11}$

▶ Exercice n°16

a) $1{,}4641 \times 10^{-6}$ b) $1{,}007437095 \times 10^{-3}$

c) $1{,}18699065421 \times 10^{40}$

▶ Exercice n°17

$R = \sqrt{\dfrac{330000}{115 \times \pi}} \approx 30\,\text{mm}$

▶ Exercice n°18

a) $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$

b) $\left(-2\sqrt{3}\right)^2=(-2)^2\times\left(\sqrt{3}\right)^2=4\times 3=12$

c) $\left(-4\sqrt{5}\right)^2=(-4)^2\times\left(\sqrt{5}\right)^2=16\times 5=80$

d) $\left(2\sqrt{2}\right)^3=2^3\times\left(\sqrt{2}\right)^2\times\sqrt{2}=8\times 2\times\sqrt{2}=16\sqrt{2}$

e) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{8}{2}}=\sqrt{4}=2$

f) $\dfrac{12\sqrt{5}}{\sqrt{3}\times\sqrt{15}}=\dfrac{12\sqrt{5}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=\dfrac{12}{3}=4$

▶ Exercice n°19

a) $\overbrace{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}^{\text{forme }(a-b)(a+b)}=\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=7-3=4$

b) $\overbrace{\left(2\sqrt{5}+1\right)\left(2\sqrt{5}-1\right)}^{\text{forme }(a-b)(a+b)}=\left(2\sqrt{5}\right)^2-1^2=2^2\times\left(\sqrt{5}\right)^2-1=4\times 5-1=19$

c) $\overbrace{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2}^{\text{forme }(a+b)^2}+\overbrace{\left(\sqrt{15}-1\right)^2}^{\text{forme }(a-b)^2}=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{15}\right)^2-2\times\sqrt{15}\times 1+1^2=3+2\sqrt{15}+5+15-2\sqrt{15}+1=24$

d) $\overbrace{\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2}^{\text{forme }(a+b)^2}=\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2+2\times\sqrt{4-\sqrt{7}}\times\sqrt{4+\sqrt{7}}+\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2=4-\sqrt{7}+2\sqrt{\left(4-\sqrt{7}\right)\left(4+\sqrt{7}\right)}+4+\sqrt{7}=8+2\sqrt{4^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=8+2\sqrt{16-7}=8+2\sqrt{9}=14$

▶ Exercice n°20

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

b) $-\dfrac{2}{\sqrt{7}}=-\dfrac{2}{\sqrt{7}}\times\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

c) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{6-5}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$

e) $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}\times\dfrac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\dfrac{3+\sqrt{2}}{3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{3+\sqrt{2}}{9-2}=\dfrac{3+\sqrt{2}}{7}$

f) $\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{-\sqrt{3}\times\sqrt{7}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{-\sqrt{21}-3}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

▶ Exercice n°21

$\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\times\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\times\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$
$=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}=\dfrac{\sqrt{x}-1-\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{-2}{x-1}=\dfrac{2}{1-x}$

▶ Exercice n°22

hypoténuse$=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(2-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2^2\times\sqrt{2}^2+2^2-2\times 2\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}$
$=\sqrt{4\times 2+4-4\sqrt{2}+2}=\sqrt{14-4\sqrt{2}}$
périmètre$=2\sqrt{2}+2-\sqrt{2}+\sqrt{14-4\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}+\sqrt{14-4\sqrt{2}}$

▶ Exercice n°23

1. a) $(2k+1)^2=(2k)^2+2\times 2k\times 1+1^2=4k^2+4k+1$.
   b) n^2 est de la forme « $2\times$ (un entier) $+1$ ». Il est donc impair.
   c) « Le carré d'un entier impair est forcément impair . Donc si le carré d'un entier est pair, cet entier est forcément pair. »
2. a) $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}\Rightarrow\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\dfrac{p}{q}\right)^2\Rightarrow 2=\dfrac{p^2}{q^2}\Rightarrow p^2=2q^2$.
   p^2 serait de la forme « $2\times$ (un entier) », il serait donc pair et d'après le résultat de la question 1. c), p serait alors forcément pair lui aussi.
   b) Si $p=2k$ alors $p^2=2q^2\Rightarrow(2k)^2=2q^2\Rightarrow 4k^2=2q^2\Rightarrow q^2=2k^2=2\times$ (un entier).
   Donc si p était pair alors q^2 serait pair lui aussi, ce qui entraine que q le serait aussi. Dès lors $\dfrac{p}{q}=\dfrac{2\times\text{(un entier)}}{2\times\text{(un autre entier)}}$ ne pourrait pas être irréductible. Ce qui contredit l'hypothèse de départ que $\sqrt{2}$ pourrait s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$.
   Conclusion : $\sqrt{2}$ ne pouvant pas s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible d'entiers est donc un nombre irrationnel.

▶ Exercice n°24

Soit p un entier impair quelconque, il peut donc s'écrire sosu la forme $p=2k+1$ (avec k entier).

Soit q un entier impair quelconque, il peut donc s'écrire sosu la forme $q = 2k' + 1$ (avec k' entier).
Dès lors, $pq = (2k + 1)(2k' + 1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2\left(2kk' + k + k'\right) + 1$.
Il est donc de la forme « $2 \times (\text{un entier}) + 1$ », ce qui prouve qu'il est forcément impair.

▶ Exercice n°25

1. Il affiche 1^3, 2^3, $\cdots$, 10^3
2. Il affiche le premier entier i tel que $i^3 \geqslant 500$.