Dérivation

► Exercice n°1

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^2 + 1$
2. $f(x) = 3x^2 - x + 7$
3. $f(x) = -5x^2 + \dfrac{x}{2} - 7$
4. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x$
5. $f(x) = -2x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 + 7x - 1$
6. $f(x) = \dfrac{2}{3}x^4 - \dfrac{5}{6}x^3 + 2x^2 - 4$

► Exercice n°2

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = -\dfrac{4}{x}$
2. $f(x) = \dfrac{2}{x} - x^2 + 7$
3. $f(x) = 4\sqrt{x} - \dfrac{6}{x}$

► Exercice n°3

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^2\sqrt{x}$
2. $f(x) = (\sqrt{x} + 2)(x^2 + 1)$
3. $f(x) = (x^2 - 2x + 5)(x - \sqrt{x})$
4. $f(x) = (\sqrt{x} + 1)\left(x^2 - 2\right)$

► Exercice n°4

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = (2x - 5)^2$
2. $f(x) = \left(-\dfrac{1}{2}x + 3\right)^2$
3. $f(x) = \left(x^2 - x + 1\right)^2$
4. $f(x) = \left(3x^2 - \dfrac{1}{x} + 7\right)^2$

► Exercice n°5

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{3x-7}$
3. $f(x) = \dfrac{3}{5x+10}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{4x^2 - x - 3}$
6. $f(x) = \dfrac{-4}{x^2 + x + 1}$

► Exercice n°6

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
2. $f(x) = \dfrac{-2x+5}{4x+3}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$
4. $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{x^2+7}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2-2x+5}{3x^2+4x+7}$
6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x+1}$

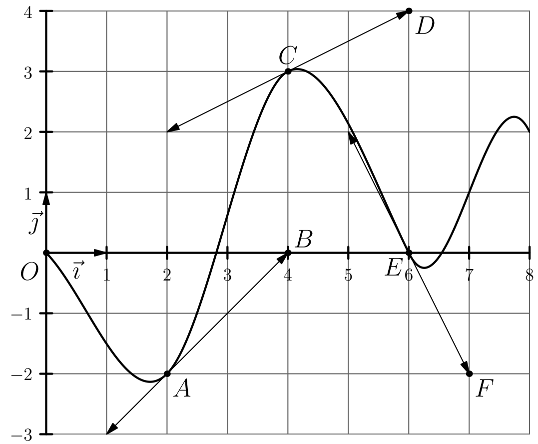
► Exercice n°7

Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse a dans les cas suivants :

1. $f(x) = -x^2 + 6x - 8 \quad a = -1$
2. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3} \quad a = 4$
3. $f(x) = \dfrac{1}{5x+9} \quad a = -2$

► Exercice n°8

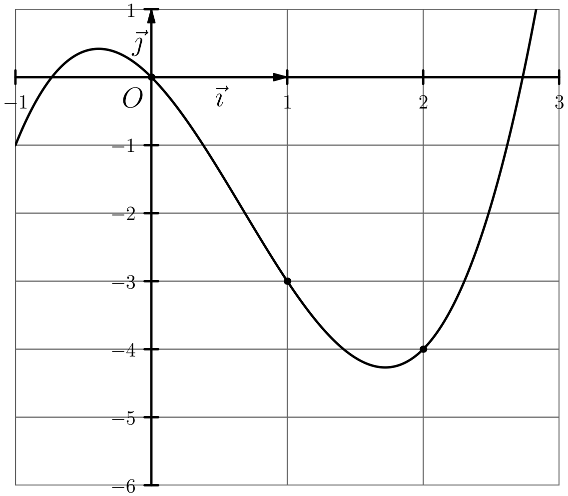
Dans la figure ci-dessous est représentée la courbe d'une fonction f dérivable sur $[0\,;8]$.



1. La tangente au point A d'abscisse 2 passe par le point B. En déduire $f'(2)$.
2. La tangente au point C d'abscisse 4 passe par le point D. En déduire $f'(4)$.
3. La tangente au point E d'abscisse 6 passe par le point F. En déduire $f'(6)$.

▶ Exercice n°9

Soit f la fonction définie sur $[-1{,}3]$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x$ dont la courbe est donnée ci-dessous. Construire sur le graphique les tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0, 1 et 2.



▶ Exercice n°10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-1}$. Déterminer si la courbe C_f admet des tangentes de coefficient directeur égal à 3 et donner une équation de ces tangentes si elles existent.

▶ Exercice n°11

Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{-x^2+2x-1}{x}$.

Déterminer les points de la courbe représentative de f (dans un repère orthonormal) où la tangente :

a) est horizontale.

b) admet -2 comme coefficient directeur.

c) est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}x - 5$.

▶ Exercice n°12

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x + 3$. Déterminer si la courbe C_f admet des tangentes passant par le point $A\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

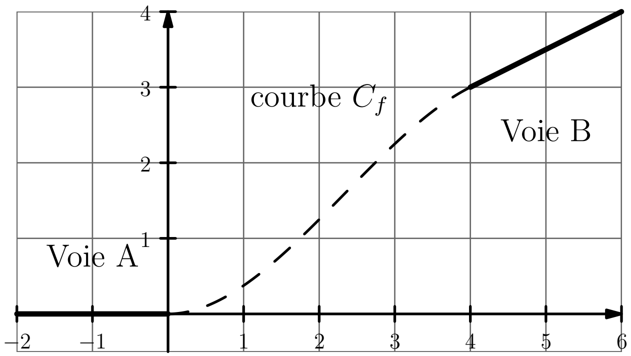
▶ Exercice n°13

Quand un objet est lâché sans vitesse initiale, il parcourt une distance (en mètres) $d(t)$ telle que $d(t) \approx 5t^2$ où t représente la durée de la chute (en secondes).

1. Calculer $d'(3)$, le nombre dérivé de la fonction d pour $t = 3$ secondes.
2. a) Calculer $d(3)$, la distance parcourue par l'objet en 3 secondes.
   b) Calculer $d(3{,}1)$, la distance parcourue par l'objet en 3,1 secondes. En déduire la vitesse moyenne de l'objet entre les instants $t = 3$ et $t = 3{,}1$.
   c) Calculer $d(3{,}01)$, la distance parcourue par l'objet en 3,01 secondes. En déduire la vitesse moyenne de l'objet entre les instants $t = 3$ et $t = 3{,}01$. Que constate-t-on ?
3. On appelle vitesse instantanée de l'objet à l'instant t, la valeur de $d'(t)$.
   a) À quel instant la vitesse instantanée est-elle égale à $100\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$? Quelle est alors la distance parcourue ?
   b) Quelle est la vitesse instantanée à l'instant de l'impact au sol, lorsque le point matériel est lâché d'une hauteur de 30 m ?

▶ Exercice n°14

La figure ci-dessous schématise deux voies ferrées que l'on doit joindre par la courbe représentative d'une fonction f de telle façon que les raccordements soient tangents.



Autrement dit, f doit respecter les quatre conditions suivantes :
$f(0) = 0$; $f'(0) = 0$, $f(4) = 3$; $f'(4) = \frac{1}{2}$ (coefficient directeur de la voie B)
On cherche $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax^3 + bx^2$.

1. Vérifier que l'on a bien $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ avec une fonction f de cette forme.
2. En exprimant que $f(4) = 3$ et $f'(4) = \frac{1}{2}$, déterminer le système que doivent vérifier a et b. En déduire l'expression finale de $f(x)$ qui réponde au problème.

▶ Exercice n°15

La concentration (en mg) d'un médicament dans le sang en fonction du temps t (en heures) est donnée par $f(t) = \dfrac{50t}{t^2+4}$ et on appelle vitesse de concentration du médicament (en $\text{mg} \cdot \text{h}^{-1}$) à l'instant t (en heures) la valeur de $f'(t)$.

1. Quelle est la vitesse de concentration au bout de 2 heures ?
2. Déterminer l'instant t pour lequel la vitesse de concentration est égale à $6 \text{mg} \cdot \text{h}^{-1}$.

▶ Exercice n°16

On considère la proposition suivante : « Si f est définie par $f(x) = x^2 + 1$ alors f' est définie par $f'(x) = 2x$ ».

1. Exprimer la **réciproque** de cette proposition.
2. La proposition est-elle vraie ?
3. La réciproque de la proposition est-elle vraie ?

▶ Exercice n°17

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,3]$ par $f(x) = 10x^2\sqrt{x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère.

1. Dériver f et montrer que pour $x \in \,]0\,;\,3]$, on a $f'(x) = \dfrac{25x^2}{\sqrt{x}}$.
2. Calculer le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 1.
3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse 2.
4. On cherche à déterminer à l'aide d'un algorithme une valeur approchée à 0,01 près du premier nombre a tel que le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a soit supérieur ou égal à 50.
   On sait d'après les premières questions que a est compris entre 1 et 2. On part donc de $a = 1$ et on augmente a de 0,01 tant que le coefficient directeur ne dépasse pas 50.
   Compléter les ... dans le script python ci-dessous pour qu'il réponde au problème.

```
from math import *
a=1
while 25*a*a/sqrt(a)......:
  a=a+0.01
print(a)
```