Applications de la dérivation

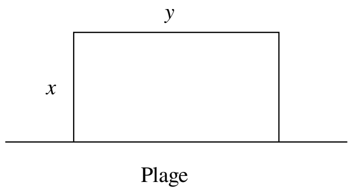
▶ Exercice n°1

L'altitude (en m) d'une fusée de détresse tirée en mer, t secondes après son départ, est donnée par
$h(t) = 39{,}2t - 4{,}9t^2$.

1. Calculer la hauteur de la fusée au bout de 8 secondes.
2. En étudiant les variations de la fonction h sur $[0; 8]$, déterminer quelle sera la hauteur maximale atteinte par la fusée.

▶ Exercice n°2

Un maître nageur dispose d'un cordon flottant de 360 m de longueur pour délimiter un rectangle de baignade surveillée.
On note x et y les dimensions, en mètres, de ce rectangle et $S(x)$ son aire en m^2 (le cordon n'est composé en lui même que des 3 côtés du rectangle qui sont dans l'eau).



1. Calculer l'aire $S(x)$ pour $x = 25$.
2. Expliquer pourquoi x ne peut pas dépasser 180 m.
3. Exprimer $S(x)$ en fonction de x.
4. En étudiant les variations de la fonction S sur $[0; 180]$, déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire est maximale ? Quelle est la valeur de cette aire maximale ?

▶ Exercice n°3

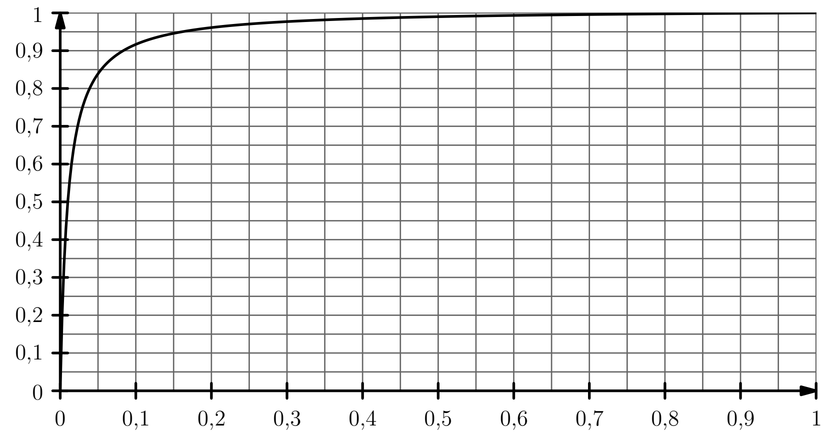
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 12$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 3.
3. Montrer que la courbe C_f admet deux points où la tangente admet un coefficient directeur égal à -9.

▶ Exercice n°4

Dans une population donnée, on note x la proportion de personnes atteintes de la grippe (on a donc $x \in [0\,;\,1[$).
Un fabricant propose un test de dépistage et affirme qu'avec son test la probabilité d'avoir la grippe lorsque le test est positif est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;\,1[$ par $f(x) = \dfrac{99x}{98x+1}$ où x est la proportion de personnes atteintes de la grippe.

1. L'affirmation suivante est-elle vraie ?
   « *Si 1 % de la population est malade, un individu ayant un test positif n'a qu'une chance sur deux d'avoir la grippe.* »
2. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,1[$.
3. À partir de quelle proportion x de malades dans la population, la probabilité d'avoir la grippe en étant positif au test dépasse-t-elle 90% ?
4. La courbe de la fonction f est donnée ci-dessous :



Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- *Affirmation 1 : « f n'est pas dérivable en* 0 »
- *Affirmation 2 : « La tangente à la courbe de f au point d'abscisse* 0.9 *est horizontale.* »

▶ Exercice n°5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est elle paire, impaire, ou ni l'une ni l'autre ?

▶ Exercice n°6

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$.

1. Étudier les variations de f sur $]-\infty\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$.
2. Étudier la position relative de C_f, la courbe représentative de f, et de d la droite d'équation $y=x$ sur $]-\infty\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$.

▶ Exercice n°7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{0;3\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-6x}$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}-\{0;3\}$.
2. Justifier, sans autres calculs, que pour tout $x<0$, $f(x)$ est positif.

▶ Exercice n°8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$.

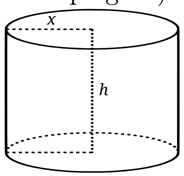
1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Préciser la valeur de $f(-1)$.
   En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

▶ Exercice n°9

On admet que lorsque la vitesse d'une voiture est comprise entre 20 et 130 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, la consommation d'essence en fonction de la vitesse v (en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$) est donnée par : $C(v)=0{,}06\,v+\dfrac{150}{v}$. En étudiant les variations de la fonction C sur l'intervalle $[20\,;\,130]$, déterminer la vitesse pour laquelle la consommation est minimale.

▶ Exercice n°10

On considère une casserole de rayon x et de hauteur h (on ne tient pas compte de la poignée).



1. Exprimer le volume V de la casserole en fonction de x et de h.
   En déduire que $\dfrac{2V}{x}=2\pi xh$.
2. Montrer que la surface S de la casserole est égale à $\pi x^2+\dfrac{2V}{x}$.
3. Pour un volume V donné (donc constant), on cherche à déterminer x pour que la surface S soit minimale. Pour cela on considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\pi x^2+\dfrac{2V}{x}$.
   Dériver f et montrer que f' s'annule pour $x=h$.

▶ Exercice n°11

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Quelle est la contraposée de la propriété suivante :
« *Si ,pour tout x, $f'(x)=0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$* »
(rappel : la contraposée de « A implique B » est « non B implique non A ».)

▶ Exercice n°12

Montrer que tout trinôme f défini par $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) admet un extremum sur $\mathbb{R}$ en $x=-\dfrac{b}{2a}$.
(le point d'abscisse $-\dfrac{b}{2a}$ est appelé sommet de la parabole représentant le trinôme)