Spécialité - 1re générale

Trigonométrie

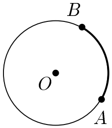
https://www.xm1math.net

1. Arcs et angles

a) Mesure en radians d'un arc géométrique

Définition

Étant donné deux points A et B sur un cercle de rayon r, on appelle **mesure en radians** de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ le nombre réel égal à $\dfrac{l}{r}$ où l est la longueur de l'arc.



Conséquences

- sur un cercle de rayon 1, la mesure en radians de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est égal à sa longueur ;
- la mesure en radians d'un cercle entier est égal à 2π car la longueur du cercle est égale à $2\pi r$;
- la mesure en radians d'un demi-cercle est égal à π.
- la mesure en radians d'un quart de cercle est égal à $\dfrac{\pi}{2}$.

xm1math.net

1. Arcs et angles

b) Autre unité de mesure d'un arc : le degré

Propriété(s)

*Le **degré** est une unité proportionnelle au radian et la mesure en degré d'un demi-cercle est de* 180°*. On a donc les correspondances suivantes :*

mesure en degrés $= \dfrac{180}{\pi} \times$ *mesure en radians* ; *mesure en radians* $= \dfrac{\pi}{180} \times$ *mesure en degrés.*

Exemple(s)

a) Conversion radians → degrés :

- 0 radian $\to 0^\circ$
- $\dfrac{\pi}{6}$ radian $\to 30^\circ$
- $\dfrac{\pi}{4}$ radian $\to 45^\circ$
- $\dfrac{\pi}{3}$ radian $\to 60^\circ$
- $\dfrac{\pi}{2}$ radian $\to 90^\circ$

b) Conversion degrés → radians :

- $120^\circ \to \dfrac{2\pi}{3}$ radians
- $135^\circ \to \dfrac{3\pi}{4}$ radians
- $150^\circ \to \dfrac{5\pi}{6}$ radians
- $180^\circ \to \pi$ radians

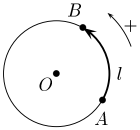
xm1math.net

1. Arcs et angles

c) Orientation d'un plan. Mesures d'un arc orienté de cercle trigonométrique

Définition

- On appelle **sens direct** ou **sens trigonométrique** le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre (signalé par un $+$).
- Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le sens direct.
- On appelle **cercle trigonométrique** tout cercle orienté dans le sens direct et de rayon égal à 1 (dans l'unité choisie).
- Étant donné deux points A et B d'un cercle trigonométrique et l la longueur minimale à parcourir pour aller de A à B dans le sens direct, on appelle mesure en radians de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ tout réel de la forme $l + 2k\pi$ où k est un entier positif ou négatif.
  Cela correspond à toutes les mesures parcourues possibles pour arriver à B en partant de A.
  (2π correspond à un tour parcouru dans le sens direct ; $2k\pi$ correspond à la mesure parcourue quand on parcourt « k tours »)



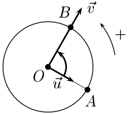
xm1math.net

1. Arcs et angles

d) Mesures d'un angle orienté de vecteurs non nuls

Définition

Étant donné deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'origine O, on appelle **mesures de l'angle** entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les mesures de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ où A et B sont les points qui interceptent l'angle sur le cercle trigonométrique de centre O.



Propriété(s)

- *Si α est* ***une*** *mesure de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors* ***toutes*** *les mesures de cet angle orienté sont de la forme $\alpha + 2k\pi$. On écrit $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.*
- *Parmi toutes les mesures d'un angle orienté, il en existe une et une seule, appelée* ***mesure principale****, se trouvant dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.*

Méthode pratique de détermination de la mesure principale d'une mesure de la forme $\dfrac{a}{b}\pi$:

On détermine p l'entier pair le plus proche de $\dfrac{a}{b}$ et on retire $p\pi$ à la mesure (si $\frac{a}{b}$ n'est pas un entier impair). Exemple : si $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{19\pi}{4} + 2k\pi$ alors la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\frac{19\pi}{4} - 4\pi = \frac{3\pi}{4}$ car l'entier pair le plus proche de $\frac{19}{4}$ est 4.

2. Trigonométrie

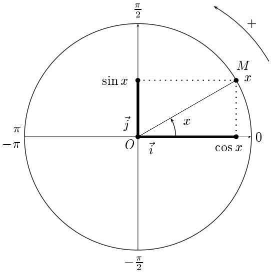
a) Cosinus et sinus d'un réel quelconque

Définition

Le plan orienté étant muni d'un repère orthonormé $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$ tel qu'une mesure de l'angle entre $\vec{i}$ et $\vec{j}$ soit égale à $+\frac{\pi}{2}$ (on parle alors de repère orthonormé direct).
Pour tout réel x, il existe un unique point M sur le cercle trigonométrique de centre O tel que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right) = x + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. M est dit alors **point associé** à x. On appelle alors :

- **cosinus de** x, le réel noté $\cos x$, égal à **l'abscisse de** M ;
- **sinus de** x, le réel noté $\sin x$, égal à **l'ordonnée de** M.

Remarque : les mesures associées aux points du cercle trigonométrique sont notées autour du cercle.



Propriété(s)

Pour tout réel x et pour tout entier k :

- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$
- $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$
- $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ *(d'après la relation de Pythagore)*

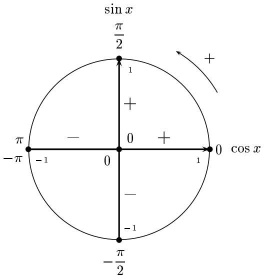
2. Trigonométrie

b) Signe de $\sin x$ et $\cos x$

Propriété(s)

On peut déduire de la définition précédente que :

- *Si* $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \geqslant 0$ *et* $\sin x \geqslant 0$
- *Si* $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $\cos x \leqslant 0$ *et* $\sin x \geqslant 0$
- *Si* $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, $\cos x \geqslant 0$ *et* $\sin x \leqslant 0$
- *Si* $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x \leqslant 0$ *et* $\sin x \leqslant 0$



Exemple(s)

Détermination de $\sin x$ sachant que $\cos x = \frac{3}{5}$ et que $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$:

$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{25} + (\sin x)^2 = 1 \Leftrightarrow (\sin x)^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sin x = \frac{4}{5}$ ou $-\frac{4}{5}$.

Mais $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, donc $\sin x$ doit être négatif. On en conclut que $\sin x = -\frac{4}{5}$.

2. Trigonométrie

c) Détermination de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

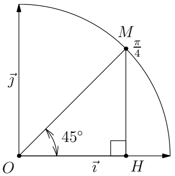
Soit M le point associé à $\frac{\pi}{4}$, H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. On a $\widehat{HOM} = 45°$ et comme la somme des angles d'un triangle est de $180°$, on a aussi $\widehat{OMH} = 45°$. Le triangle OMH est donc forcément isocèle en H. Or, $OH = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $HM = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$. On doit donc avoir $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

$\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = 1 \Rightarrow 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Mais $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ doit être positif, on a forcément $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Et comme, $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, on a aussi $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$



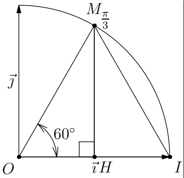
d) Détermination de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Soit M le point associé à $\frac{\pi}{3}$, H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. On a $\widehat{HOM} = 60°$ avec $OI = OM = 1$. On en déduit que le triangle OMI est équilatéral et que la hauteur (MH) est aussi la médiatrice de $[OI]$. H est donc le milieu de $[OI]$ et la distance OH, qui correspond à $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, est égale à $\frac{1}{2}$.

$\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Comme $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ doit être positif, on a forcément $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$



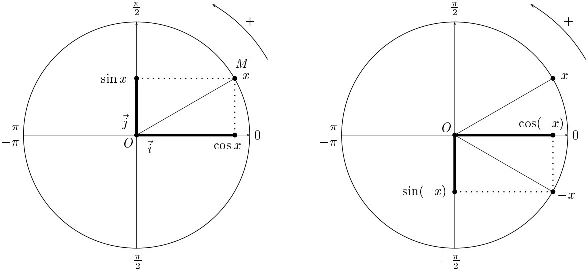
2. Trigonométrie

e) Cosinus et sinus de $-x$

Propriété(s)

Pour tout réel x :

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$



Exemple(s)

On peut en déduire, par exemple, que $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

xm1math.net

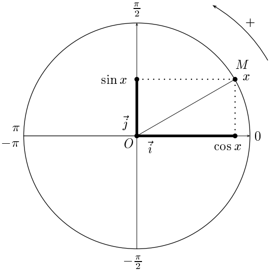
2. Trigonométrie

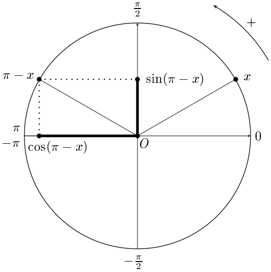
f) Cosinus et sinus de $\pi - x$

Propriété(s)

Pour tout réel x :

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$





Exemple(s)

On peut en déduire, par exemple, que $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et donc que $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

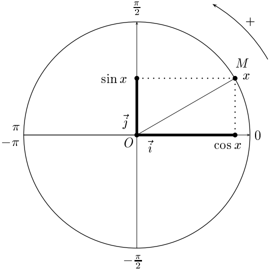
2. Trigonométrie

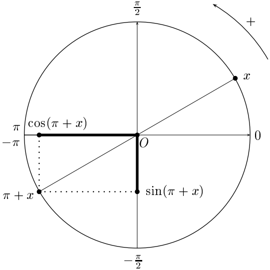
g) Cosinus et sinus de $\pi + x$

Propriété(s)

Pour tout réel x :

- $\cos(\pi + x) = -\cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$





Exemple(s)

On peut en déduire, par exemple, que $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc que $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

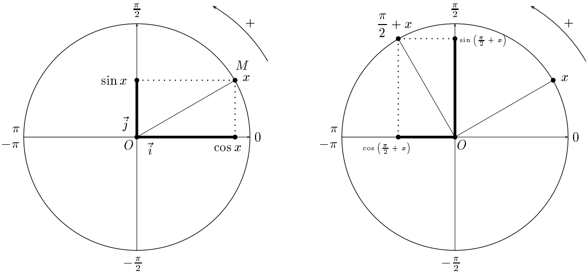
2. Trigonométrie

g) Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{2} + x$

Propriété(s)

Pour tout réel x :

- $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$
- $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$



Exemple(s)

On peut en déduire, par exemple, que $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc que $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

xm1math.net

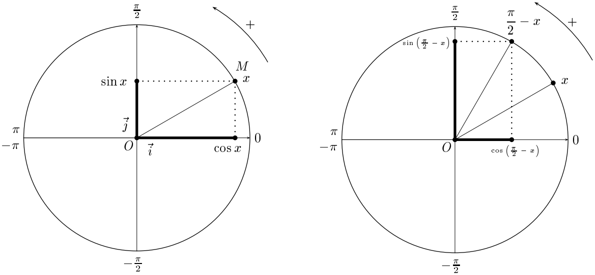
2. Trigonométrie

h) Cosinus et sinus de $\frac{\pi}{2} - x$

Propriété(s)

Pour tout réel x :

- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$



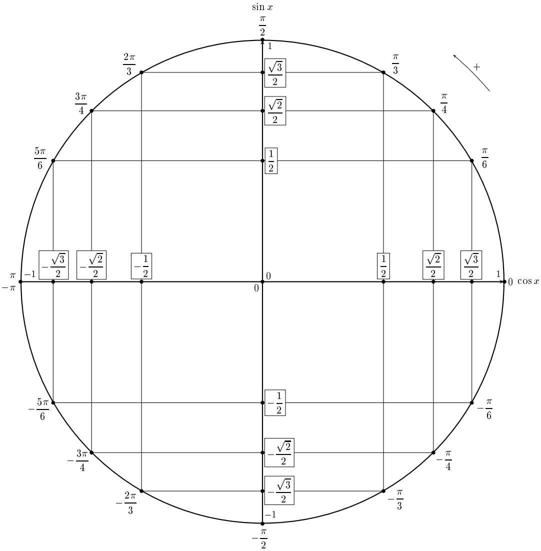
Exemple(s)

On peut en déduire, par exemple, que $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et donc que $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

xm1math.net

2. Trigonométrie

i) Valeurs remarquables de sinus et cosinus



2. Trigonométrie

Application

1. Détermination du sinus et cosinus d'un réel x dont le point associé est connu :
   - Si $x \in]-\pi;\pi]$, on lit les résultats sur le cercle ;
   - sinon, on détermine d'abord la mesure principale et x aura le même sinus et cosinus que la mesure principale.
2. Détermination des réels x tels que $\cos x = a$ et $\sin x = b$:
   On cherche le point du cercle d'abscisse a et d'ordonnée b. S'il correspond à une mesure α, on a alors $x = \alpha + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Exemple(s)

1) Détermination du cosinus et sinus de $-\frac{5\pi}{6}$. Il suffit de lire directement sur le cercle l'abscisse et l'ordonnée du point associé à $-\frac{5\pi}{6}$. On a donc $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (abscisse) et $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ (ordonnée).

2) Détermination de $\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)$. $\frac{13\pi}{3}$ n'étant pas dans $]-\pi;\pi]$, on cherche d'abord la mesure principale correspondante : l'entier pair le plus proche de $\frac{13}{3}$ est 4, donc la mesure principale est $\frac{13\pi}{3} - 4\pi = \frac{\pi}{3}$.
On en déduit que $\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ (abscisse du point associé à $\frac{\pi}{3}$)

3) Détermination des réels x tels que $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x = \frac{1}{2}$: on cherche le point du cercle d'abscisse $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'ordonnée $\frac{1}{2}$. Le point qui correspond est celui associé à la mesure $\frac{5\pi}{6}$. On en déduit que tous les x qui conviennent sont de la forme $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

3. Exemples d'équations et d'inéquations trigonométriques

a) Avec des cosinus

Exemple(s)

1) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:
Cela revient à déterminer les points du cercle trigonométrique dont l'abscisse est égale à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On trouve deux points : ceux associés à $\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$. Comme on résout dans $\mathbb{R}$, il faut déterminer toutes les mesures qui correspondent. On a donc $S = \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi; -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2) Résolution dans $]-\pi;\pi]$ de l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$:
Cela revient à déterminer les points du cercle trigonométrique dont l'abscisse est égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
On trouve deux points : ceux associés à $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$.
Comme on résout uniquement dans $]-\pi;\pi]$, on a simplement $S = \left\{\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right\}$.

3) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos(2x) = \frac{1}{2}$:
On détermine d'abord les points du cercle trigonométrique dont l'abscisse est égale à $\frac{1}{2}$. On trouve deux points : ceux associés à $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.
On a donc $\cos(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$.
On en déduit que $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi; -\frac{\pi}{6} + k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

4) Résolution dans $]-\pi;\pi]$ de l'inéquation $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$. Cela revient à déterminer les points du cercle dont l'abscisse est supérieure ou égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (tout en restant entre $-\pi$ et π). On en déduit que $S = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

xm1math.net

3. Exemples d'équations et d'inéquations trigonométriques

b) Avec des sinus

Exemple(s)

1) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$:
Cela revient à déterminer les points du cercle trigonométrique dont l'ordonnée est égale à $\frac{1}{2}$.
On trouve deux points : ceux associés à $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$. Comme on résout dans $\mathbb{R}$, il faut déterminer toutes les mesures qui correspondent. On a donc $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2) Résolution dans $]-\pi ; \pi]$ de l'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:
Cela revient à déterminer les points du cercle trigonométrique dont l'ordonnée est égale à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On trouve deux points : ceux associés à $-\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$.
Comme on résout uniquement dans $]-\pi ; \pi]$, on a simplement $S = \left\{ -\frac{\pi}{3} ; -\frac{2\pi}{3} \right\}$.

3) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$:
On détermine d'abord les points du cercle trigonométrique dont l'ordonnée est égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$. On trouve deux points : ceux associés à $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.
On a donc $\sin(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $3x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$.
On en déduit que $S = \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} ; \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

4) Résolution dans $[0 ; \pi]$ de l'inéquation $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$. Cela revient à déterminer les points du cercle dont l'ordonnée est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$ (tout en restant entre 0 et π). On en déduit que $S = \left[\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} \right]$.

Fin du chapitre