Spécialité - 1re générale

Suites numériques

https://www.xm1math.net

1. Définition générale

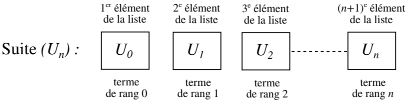
Exemple introductif

De façon très générale, une suite numérique est une liste de nombres.
Par exemple, la suite des entiers impairs est 1, 3, 5, 7, $\cdots$.
Mais pour pouvoir manipuler ces listes de nombres, il faut pouvoir numéroter et désigner leurs éléments. Et comme souvent, en mathématiques, on commence à numéroter à partir de 0. Ainsi notre liste des entiers impairs devient, en la formalisant, la suite (U_n) définie par :$U_0 = 1$, $U_1 = 3$, $U_2 = 5$, $U_3 = 7$, $\cdots$.

- Le 1er élément de la liste $U_0 = 1$ est appelé **terme de rang** 0 de la suite (U_n) ;
- Le 2e élément de la liste $U_1 = 3$ est appelé **terme de rang** 1 de la suite (U_n) ;
- Le 3e élément de la liste $U_2 = 5$ est appelé **terme de rang** 2 de la suite (U_n) et ainsi de suite...

Définition

Une suite (U_n) est une liste infinie de nombres que l'on peut numéroter de la façon suivante :



Remarque(s)

- Une suite ne peut-être définie qu'à partir d'un certain rang n_0. Elle est alors notée $(U_n)_{n \geqslant n_0}$.
- Il existe plusieurs façons de générer des listes de nombres et donc de définir des suites.

Note : Pour tout le reste du chapitre, n désigne un entier positif.

2. Suites définies de façon explicite

a) Définition

Définition

Une suite (U_n) est dite définie de **façon explicite** si on connaît une formule permettant de calculer directement n'importe quel terme U_n en fonction de n.
(cela revient à dire qu'il existe une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ telle que, pour tout entier positif n, on ait $U_n = f(n)$)

Exemple(s)

• **Exemple 1** : Soit (U_n) la suite définie par (U_n) par $U_n = 2n + 3$. On a :

$U_0 = 2 \times 0 + 3 = 3$

$U_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$

$U_{10} = 2 \times 10 + 3 = 23$

$U_{n+1} = 2(n+1) + 3 = 2n + 5$

• **Exemple 2** : Soit (U_n) la suite définie par (U_n) par $U_n = \dfrac{6}{n+1}$. On a :

$U_0 = \dfrac{6}{0+1} = 6$

$U_1 = \dfrac{6}{1+1} = 3$

$U_2 = \dfrac{6}{2+1} = 2$

$U_3 = \dfrac{6}{3+1} = 1,5$

$U_4 = \dfrac{6}{4+1} = 1,2$

$U_{n+1} = \dfrac{6}{(n+1)+1} = \dfrac{6}{n+2}$

2. Suites définies de façon explicite

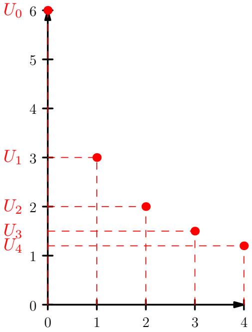
b) Représentation graphique d'une suite explicite

Principe

Dans un repère orthogonal, la représentation graphique d'une suite (U_n) se compose de l'ensemble des points isolés **d'abscisse** n **et d'ordonnée** U_n. (les points ne sont normalement pas reliés)

Exemple(s)

Représentation graphique des 5 premiers termes de la suite (U_n) définie par (U_n) par $U_n = \dfrac{6}{n+1}$.



3. Suites définies de façon récurrente

a) Principe et définition

Définition

Une suite (U_n) est dite définie de **façon récurrente** lorsqu'on connaît son premier terme et qu'une relation (dite de récurrence) permet de calculer un terme à partir du précédent (ou des précédents).
Cette relation entre un terme et le terme précédent se formalise généralement avec une formule donnant U_{n+1} en fonction de U_n.

$$\boxed{U_0} \xrightarrow{\textit{formule}} \boxed{U_1} \xrightarrow{\textit{formule}} \boxed{U_2} \dashrightarrow^{\textit{formule}} \boxed{U_n} \xrightarrow{\textit{formule}} \boxed{U_{n+1}}$$

Exemple(s)

• **Exemple 1** : Soit (U_n) définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 3 + U_n$ (ce qui veut dire qu'un terme est égal trois plus le terme précédent). On a :

- $U_1 = 3 + U_0$ *(« 3 + terme précédent »)*, donc $U_1 = 3 + 2 = 5$.
- $U_2 = 3 + U_1$ *(« 3 + terme précédent »)*, donc $U_2 = 3 + 5 = 8$.
- $U_3 = 3 + U_2$ *(« 3 + terme précédent »)*, donc $U_3 = 3 + 8 = 11$.

Script python permettant de calculer U_n :

```
n=int(input("n:?"))
U=2
for i in range(n) :
    U=3+U
print(U)
```

3. Suites définies de façon récurrente

Exemple(s)

• **Exemple 2** : Soit (U_n) définie par $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = 1 + 2U_n$ (ce qui veut dire qu'un terme est égal à un plus deux fois le terme précédent).

1. Compléter les calculs suivants :

- $U_1 = 1 + 2U_0 = \ldots\ldots$
- $U_2 = 1 + 2U_1 = \ldots\ldots$
- $U_3 = 1 + 2U_2 = \ldots\ldots$

2. Compléter le script suivant pour qu'il affiche U_n :

```
n=int(input("n:?"))
U=........
for i in range(n) :
    U=.........
print(U)
```

Réponses :

1.

- $U_1 = 1 + 2U_0 = 1 + 2 \times 3 = 7$
- $U_2 = 1 + 2U_1 = 1 + 2 \times 7 = 15$
- $U_3 = 1 + 2U_2 = 1 + 2 \times 15 = 31$

2.

```
n=int(input("n:?"))
U=3
for i in range(n) :
    U=1+2*U
print(U)
```

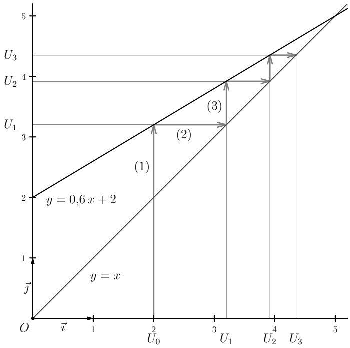
xm1math.net

3. Suites définies de façon récurrente

b) Exemple de détermination graphique des premiers termes d'une suite récurrente avec le mode « web »

Exemple(s)

Soit (U_n), la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 0,6\,U_n + 2$.
On trace d'abord la droite D d'équation $y = 0,6\,x + 2$ et la droite d'équation $y = x$.



• On part de U_0 en abscisse : l'ordonnée du point de la droite D correspondant à cette abscisse nous donne U_1 [(1) *sur le graphique*] .

• Pour déterminer $U_2 = f\,(U_1)$, il nous faut rabattre U_1 sur l'axe des abscisses [(2) *sur le graphique*] en utilisant la droite d'équation $y = x$.
Dès lors, U_2 est l'ordonnée du point de la droite D d'abscisse U_1 [(3) *sur le graphique*].

• Pour poursuivre la construction, on répète le procédé en rabattant U_2 sur l'axe des abscisses...

xm1math.net

4. Sens de variation d'une suite

Définition

- Une suite (U_n) est dite **croissante** si pour tout entier n (à partir d'un certain rang), on a $U_{n+1} \geqslant U_n$.
- Une suite (U_n) est dite **décroissante** si pour tout entier n (à partir d'un certain rang), on a $U_{n+1} \leqslant U_n$.
- Une suite (U_n) est dite **constante** si pour tout entier n (à partir d'un certain rang), on a $U_{n+1} = U_n$.

Méthodes pratiques

- **Méthode 1** (valable pour toutes les suites) : on calcule et on étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$.
  - Si, **pour tout** n, $U_{n+1} - U_n$ **reste positif** alors on peut conclure que (U_n) est **croissante**.
  - Si, **pour tout** n, $U_{n+1} - U_n$ **reste négatif** alors on peut conclure que (U_n) est **décroissante**.

▶ Exemple 1 : soit (U_n) définie par $U_n = 3n + 5$.
Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = 3(n+1) + 5 - (3n+5)\, 3n + 8 - 3n - 5 = 3$ qui reste positif. On en conclut que (U_n) est croissante.

▶ Exemple 2 : soit (U_n) définie par $U_n = -n^2$.
Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = -(n+1)^2 - (-n^2) = -n^2 - 2n - 1 + n^2 = -2n - 1$ qui reste négatif. On en conclut que (U_n) est décroissante.

▶ Exemple 3 :soit (U_n) définie par $U_{n+1} = U_n + \sqrt{n}$.
Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = \sqrt{n}$ qui reste positif. On en conclut que (U_n) est croissante.

xm1math.net

4. Sens de variation d'une suite

• **Méthode 2** (valable uniquement pour les suites dont tous les termes sont strictement positifs) : on calcule et on compare à 1 le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$.

- Si, **pour tout** n, $U_n > 0$ et $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ **reste supérieur à 1** alors on peut conclure que (U_n) est **croissante**.
- Si, **pour tout** n, $U_n > 0$ et $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ **reste inférieur à 1** alors on peut conclure que (U_n) est **décroissante**.

▶ Exemple 1 : soit (U_n) définie par $U_n = 5 \times 3^n$.
Pour tout n, $U_n > 0$ et $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{5\times 3^{n+1}}{5\times 3^n} = 3$ qui reste supérieur à 1. On en conclut que (U_n) est croissante.

▶ Exemple 2 : soit (U_n) définie par $U_n = \frac{6}{4^n}$.
Pour tout n, $U_n > 0$ et $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{6}{4^{n+1}}}{\frac{6}{4^n}} = \frac{6}{4^{n+1}} \times \frac{4^n}{6} = \frac{1}{4}$ qui reste inférieur à 1. On en conclut que (U_n) est décroissante.

• **Méthode 3** pour les suites définies de façon explicite par $U_n = f(n)$.

- Si la **fonction** f **est croissante** sur $[0;+\infty[$ alors la **suite** (U_n) **est croissante**.
- Si la **fonction** f **est décroissante** sur $[0;+\infty[$ alors la **suite** (U_n) **est décroissante**.

▶ Exemple : soit (U_n) définie par $U_n = \dfrac{1}{3n+1}$. On a $U_n = f(n)$ avec f définie par $f(x) = \dfrac{1}{3x+1}$. Pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = -\dfrac{3}{(3x+1)^2} < 0$. f est décroissante sur $[0;+\infty[$. On en conclut que (U_n) est décroissante.

xm1math.net

5. Suites arithmétiques

a) Définition

Définition

Une suite (U_n) est dite **arithmétique** si l'on passe d'un terme au terme suivant **en ajoutant toujours par le même nombre** r, appelé raison de la suite.

$\boxed{U_0} \xrightarrow{+r} \boxed{U_1} \xrightarrow{+r} \boxed{U_2} \cdots\cdots \boxed{U_n} \xrightarrow{+r} \boxed{U_{n+1}}$

Autrement dit : pour tout n, on a $U_{n+1} = U_n + r$

Exemple(s)

$U_0 = 4$, $U_1 = 7$, $U_2 = 10$, $U_3 = 13$ et $U_4 = 16$ sont les premiers termes d'une suite arithmétique de raison 3 :

$\boxed{4} \xrightarrow{+3} \boxed{7} \xrightarrow{+3} \boxed{10} \xrightarrow{+3} \boxed{13} \xrightarrow{+3} \boxed{16}$

b) Calcul des termes d'une suite arithmétique

Propriété(s)

Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tous les entiers positifs n et p, on a :
$U_n = U_0 + nr$ *et* $U_n = U_p + (n - p)r$

Démonstration : pour aller de U_0 à U_n il faut ajouter n fois r. Et si $U_n = U_0 + nr$ et $U_p = U_0 + pr$, on a $U_n - U_p = (n - p)r$.

5. Suites arithmétiques

Exemple(s)

1. Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r.

a) Exprimer U_5 en fonction de U_0.

b) Exprimer U_{13} en fonction de U_0.

c) Exprimer U_{24} en fonction de U_4.

d) Exprimer U_{16} en fonction de U_{11}.

2. Soit (U_n) la suite arithmétique de 1[er] terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 3$.

a) Calculer U_{10}.

b) Calculer U_{33}.

c) Exprimer U_n en fonction de n.

3. Soit (U_n) la suite arithmétique de 1[er] terme $U_0 = 3$ et de raison $r = -5$.

a) Calculer U_{12}.

b) Calculer U_{25}.

c) Exprimer U_n en fonction de n.

4. Soit (U_n) la suite arithmétique de raison $r = 3$ avec $U_5 = 16$.

a) Calculer U_{34}.

b) Exprimer U_n en fonction de n.

5. Soit (U_n) la suite arithmétique telle que $U_2 = 7$ et $U_5 = 25$. Déterminer sa raison r et U_0.

Réponses :

1.

a) $U_5 = U_0 + 5r$.

b) $U_{13} = U_0 + 13r$.

c) $U_{24} = U_4 + 20r$.

d) $U_{16} = U_{11} + 5r$.

2.

a) $U_{10} = U_0 + 10r = 2 + 10 \times 3 = 32$.

b) $U_{33} = U_0 + 33r = 2 + 33 \times 3 = 101$.

c) $U_n = U_0 + nr = 2 + 3n$.

3.

a) $U_{12} = U_0 + 12r = 3 + 12 \times (-5) = -57$.

b) $U_{25} = U_0 + 35r = 3 + 25 \times (-5) = -122$.

c) $U_n = U_0 + nr = 3 - 5n$.

4.

a) $U_{34} = U_5 + 29r = 16 + 29 \times 3 = 103$.

b) $U_n = U_5 + (n-5)r = 16 + 3(n-5) = 3n + 1$.

5. $U_5 = U_2 + 3r \Leftrightarrow 25 = 7 + 3r \Leftrightarrow r = 6$.
$U_0 = U_2 - 2r = 7 - 2 \times 6 = -5$.

5. Suites arithmétiques

c) Comment montrer qu'une suite (U_n) est arithmétique ?

Principe

- Soit l'énoncé indique que l'on passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre, alors on peut conclure directement que la suite est arithmétique de raison égale à ce nombre.
- Soit on montre que, pour **tout** n, $U_{n+1} - U_n$ est égal à une constante (indépendante de n). On peut alors conclure que la suite est arithmétique de raison égale à cette constante.

Exemple(s)

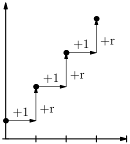
La suite (U_n)définie par $U_n = 4n + 5$ est-elle arithmétique ?

Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = 4(n + 1) + 5 - (4n + 5) = 4$. On en déduit que (U_n) est une suite arithmétique de raison égale à 4.

d) Propriété de la représentation graphique d'une suite arithmétique

Propriété(s)

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont situés sur une même droite dont le coefficient directeur est égal à la raison.



5. Suites arithmétiques

e) Sens de variation d'une suite arithmétique

Propriété(s)

Une suite arithmétique de raison r positive est croissante et une suite arithmétique de raison r négative est décroissante.

Démonstration : car $U_{n+1} - U_n = r$ pour tout n.

e) Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété(s)

Si (U_n) est arithmétique de raison r alors pour tous entiers n et p avec $p < n$:

$$U_p + U_{p+1} + \cdots + U_{n-1} + U_n = (n - p + 1) \times \frac{U_p + U_n}{2} = (\text{nb de termes}) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2}$$

Démonstration :

- Pour tout entier i qui convient,
  $U_{p+i} + U_{n-i} = U_0 + (p+i)r + U_0 + (n-i)r = U_0 + pr + \cancel{ir} + U_0 + nr - \cancel{ir} = U_p + U_n$.
- Soit $S = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_{n-1} + U_n$, on a aussi $S = U_n + U_{n-1} + \cdots + U_{p+1} + U_p$ en l'écrivant dans l'autre sens. D'où en ajoutant, on a
  $2S = (U_p + U_n) + \underbrace{(U_{p+1} + U_{n-1})}_{=U_p+U_n} + \cdots + \underbrace{(U_{n-1} + U_{p+1})}_{=U_p+U_n} + (U_n + U_p) = \underbrace{(n - p + 1)}_{\text{nb de termes}} \times (U_p + U_n)$

5. Suites arithmétiques

Conséquence

Pour tout entier $n > 1$, on a $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemple(s)

1. Soit (U_n) la suite arithmétique de 1^{er} terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 3$.

a) Calculer la somme $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_{10}$.

b) Calculer la somme $S' = U_{10} + U_{11} + \cdots + U_{50}$.

2. Calculer la somme $S = 5 + 7 + 9 + 11 + \cdots + 119 + 121$.

Réponses :

1.

a) $S = 11 \times \dfrac{U_0 + U_{10}}{2} = 11 \times \dfrac{2+32}{2} = 187$.
Car $U_{10} = U_0 + 10r = 32$

b) $S = 41 \times \dfrac{U_{10} + U_{50}}{2} = 41 \times \dfrac{32+152}{2} = 3772$.
Car $U_{50} = U_0 + 50r = 152$

2. On reconnaît la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 2. Mais il nous manque le nombre de termes pour pouvoir appliquer la formule. On utilise alors la propriété suivante :

$$\text{nb de termes} = \frac{\text{dernier terme} - \text{premier}}{\text{raison}} + 1$$

$$= \left(\frac{121-5}{2} + 1\right) = 59.$$

D'où, $S = 59 \times \dfrac{5+121}{2} = 3717$.

xm1math.net

6. Suites géométriques

a) Définition

Définition

Une suite (U_n) est dite **géométrique** si l'on passe d'un terme au terme suivant **en multipliant toujours par le même nombre** q, appelé raison de la suite.

$$\boxed{U_0} \xrightarrow{\times q} \boxed{U_1} \xrightarrow{\times q} \boxed{U_2} \cdots\cdots \boxed{U_n} \xrightarrow{\times q} \boxed{U_{n+1}}$$

Autrement dit : pour tout n, on a $U_{n+1} = q\,U_n$

Exemple(s)

$U_0 = 2$, $U_1 = 6$, $U_2 = 18$, $U_3 = 54$ et $U_4 = 162$ sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison 3 :

$$\boxed{2} \xrightarrow{\times 3} \boxed{6} \xrightarrow{\times 3} \boxed{18} \xrightarrow{\times 3} \boxed{54} \xrightarrow{\times 3} \boxed{162}$$

b) Calcul des termes d'une suite géométrique

Propriété(s)

Si (U_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 0$ alors pour tous les entiers positifs n et p, on a : $U_n = q^n U_0$ et $U_n = q^{n-p} U_p$

Démonstration : pour aller de U_0 à U_n il faut multiplier n fois par q. Et si $U_n = q^n U_0$ et $U_p = q^n U_0$, on a $\dfrac{U_n}{q^n} = \dfrac{U_p}{q^p} \Leftrightarrow U_n = q^n \times \dfrac{U_p}{q^p}$.

6. Suites géométriques

Exemple(s)

1. Soit (U_n) une suite géométrique de raison q.

a) Exprimer U_3 en fonction de U_0.

b) Exprimer U_{12} en fonction de U_0.

c) Exprimer U_{15} en fonction de U_5.

d) Exprimer U_{24} en fonction de U_{11}.

2. Soit (U_n) la suite géométrique de 1^{er} terme $U_0 = 4$ et de raison $q = 2$.

a) Calculer U_5.

b) Calculer U_8.

c) Exprimer U_n en fonction de n.

3. Soit (U_n) la suite géométrique de 1^{er} terme $U_0 = 640$ et de raison $q = 0,5$.

a) Calculer U_3.

b) Calculer U_6.

c) Exprimer U_n en fonction de n.

4. Soit (U_n) la suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ avec $U_2 = 54$.

a) Calculer U_5.

b) Exprimer U_n en fonction de n.

Réponses :

1.

a) $U_3 = q^3 U_0$.

b) $U_{12} = q^{12} U_0$.

c) $U_{15} = q^{10} U_5$.

d) $U_{24} = q^{13} U_{11}$.

2.

a) $U_5 = q^5 U_0 = 2^5 \times 4 = 128$.

b) $U_8 = q^8 U_0 = 2^8 \times 4 = 1024$.

c) $U_n = q^n U_0 = 2^n \times 4$.

3.

a) $U_3 = q^3 U_0 = 0,5^3 \times 640 = 80$.

b) $U_6 = q^6 U_0 = 0,5^6 \times 640 = 10$.

c) $U_n = q^n U_0 = 0,5^n \times 640$.

4.

a) $U_5 = q^3 U_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 54 = 2$.

b) $U_n = q^{n-2} U_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \times 54$.

6. Suites géométriques

c) Comment montrer qu'une suite (U_n) est géométrique ?

Principe

• Si l'énoncé indique que l'on passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours le même nombre, alors on peut conclure directement que la suite est géométrique de raison égale à ce nombre.

• Sinon, si tous les termes sont non nuls et si on montre que, pour **tout** n, $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est égal à une constante (indépendante de n) alors on peut conclure que la suite est géométrique de raison égale à cette constante.

Exemple(s)

La suite (U_n)définie par $U_n = 5 \times 3^n$ est-elle géométrique ?

Pour tout n, $U_n \neq 0$ et $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{5\times 3^{n+1}}{5\times 3^n} = 3$. (U_n) est donc une suite géométrique de raison égale à 3.

d) Sens de variation d'une suite géométrique

Propriété(s)

- *Si le premier terme est positif et si $q > 1$ alors la suite géométrique de raison q est croissante.*
- *Si le premier terme est positif et si $0 < q < 1$ alors la suite géométrique de raison q est décroissante.*

Démonstration : car dans ces cas là, $U_n > 0$ et $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$ pour tout n .

Remarque : dans les autres cas, il faut en revenir à l'étude du signe de $U_{n+1} - U_n$.

6. Suites géométriques

e) Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété(s)

- *Pour tout réel* $q \neq 1$: $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
- *Si* (U_n) *est une suite géométrique de raison* $q \neq 1$ *alors pour tous les entiers* n *et* p *avec* $p < n$:
$U_p + U_{p+1} + \cdots + U_{n-1} + U_n = U_p \times \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \text{premier terme} \times \dfrac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$

Démonstration :

- Si $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$ alors
$S - qS = 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cancel{q^3} + \cdots + \cancel{q^n} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \cancel{q^3} - \cancel{q^4} - \cdots - q^{n+1} = 1 - q^{n+1} \Rightarrow (1-q)S = 1 - q^{n+1}$.
- $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_{n-1} + U_n = U_p + qU_p + \cdots + q^{n-1-p}U_p + q^{n-p}U_p$
$= U_p\left(1 + q + \cdots + q^{n-1-p} + q^{n-p}\right) = U_p \times \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$.

Exemple(s)

1. Soit (U_n) la suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de 1er terme $U_0 = 512$. Calculer la somme $S = U_0 + U_1 + \cdots + U_9$.

2. Calculer la somme $S = 2 + 6 + 18 + 54 + \cdots + 486$.

Réponses :

1. $S = U_0 \times \dfrac{1 - 0,5^{10}}{1 - 0,5} = 512 \times \dfrac{1 - 0,5^{10}}{0,5} = 1023$

2. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3. On a alors $S - 3S = 2 + 6 + 18 + 54 + \cdots + 486 - 6 - 18 - 54 - \cdots - 1458 = 2 - 1458 = -1456$. On en déduit que $-2S = -1456$ et que $S = 728$.

7. Exemple de suite récurrente définie par $U_{n+1} = a\,U_n + b$

Exemple(s)

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 0,6\,U_n + 2$.

1. Calculer U_1, U_2, $U_1 - U_0$, $U_2 - U_1$, $\frac{U_1}{U_0}$ et $\frac{U_2}{U_1}$.

Réponse : $U_1 = 0,6 \times 2 + 2 = 3,2$, $U_2 = 0,6 \times 3,2 + 2 = 3,92$, $U_1 - U_0 = 1,2$, $U_2 - U_1 = 0,72$, $\frac{U_1}{U_0} = 1,6$ et $\frac{U_2}{U_1} = 1,225$

2. Justifier que (U_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Réponse : elle ne peut pas être arithmétique car $U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$ et elle ne peut pas être géométrique car $\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_1}{U_0}$.

3. Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 5$ est une suite géométrique dont on donnera le 1^er^ terme V_0 et la raison q.

Réponse :

- on calcule $\dfrac{V_{n+1}}{V_n}$ en exprimant V_n et V_{n+1} en fonction de U_n et de U_{n+1} :
  $$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 5}{U_n - 5}$$
- on remplace alors U_{n+1} par ce qu'indique la définition de la suite (U_n) :
  $$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 5}{U_n - 5} = \frac{0,6\,U_n + 2 - 5}{U_n - 5}$$
- on simplifie le numérateur et on le factorise par le coefficient devant U_n :
  $$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 5}{U_n - 5} = \frac{0,6\,U_n + 2 - 5}{U_n - 5} = \frac{0,6\,U_n - 3}{U_n - 5} = \frac{0,6\left(U_n - \frac{3}{0,6}\right)}{U_n - 5} = \frac{0,6\,(U_n - 5)}{U_n - 5} = 0,6$$

(V_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,6$ et de 1$^{\text{er}}$ terme $V_0 = U_0 - 5 = 2 - 5 = -3$.

7. Exemple de suite récurrente définie par $U_{n+1} = a\,U_n + b$

4. En déduire l'expression de V_n, puis de U_n en fonction de n.

Réponse : Pour tout n, $V_n = q^n \times V_0 = -3\,(0,6)^n$. $V_n = U_n - 5 \Leftrightarrow U_n = V_n + 5 = -3\,(0,6)^n + 5$

5. Étudier le sens de variation de la suite (U_n).

Réponse : Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = -3\,(0,6)^{n+1} + 5 - [-3\,(0,6)^n + 5] = -3\,(0,6)^{n+1} + 3\,(0,6)^n$
$= 3\,(0,6)^n \times [-0,6 + 1] = 3\,(0,6)^n \times 0,4 = 1,2\,(0,6)^n$.

Le résultat étant positif pour tout n, on en déduit que (U_n) est croissante.

6. Calculer $V_0 + V_1 + \cdots + V_9$ et en déduire $U_0 + U_1 + \cdots + U_9$.

Réponse :

(V_n) est géométrique, donc $V_0 + V_1 + \cdots + V_9 = V_0 \times \dfrac{1-(0,6)^{10}}{1-0,6} = -3 \times \dfrac{1-(0,6)^{10}}{0,4} \approx -7,45$.

Pour tout n, $U_n = V_n + 5$. Donc, $U_0 + U_1 + \cdots + U_9 = V_0 + 5 + V_1 + 5 + \cdots + V_9 + 5$

$= V_0 + V_1 + \cdots + V_9 + 50 \approx 42,55$.

7. Compléter le script python ci-dessous pour qu'il affiche le plus petit entier n tel que $U_n > 4,997$.

```
n=0
U=2
while ...... :
    U=0.6*U+2
    n=n+1
print(n)
```

Réponse :

```
n=0
U=2
while U<=4.997 :
    U=0.6*U+2
    n=n+1
print(n)
```

8. Exemples de comportement d'une suite quand n tend vers $+\infty$

Exemple(s)

1. Soit (U_n), la suite définie par $U_n = 3 + \dfrac{1}{n}$.

• Compléter les inégalités suivantes :

1. Si $n > 10$ alors $0 < \dfrac{1}{n} < \ldots\ldots$ et $3 < U_n < \ldots\ldots$.
2. Si $n > 100$ alors $0 < \dfrac{1}{n} < \ldots\ldots$ et $3 < U_n < \ldots\ldots$.
3. Si $n > \ldots\ldots$ alors $0 < \dfrac{1}{n} < \ldots\ldots$ et $3 < U_n < 3,001$.

Réponses :

1. Si $n > 10$ alors $0 < \dfrac{1}{n} < 0,1$ et $3 < U_n < 3,1$.
2. Si $n > 100$ alors $0 < \dfrac{1}{n} < 0,01$ et $3 < U_n < 3,01$.
3. Si $n > 1000$ alors $0 < \dfrac{1}{n} < 0,001$ et $3 < U_n < 3,001$.

• Il semble que l'on puisse toujours trouver un n assez grand pour que U_n soit aussi proche de 3 que l'on veut. On dit alors que U_n tend vers 3 quand n tend vers $+\infty$.

2. Soit (U_n), la suite définie par $U_n = n^2$.

• Compléter les inégalités suivantes :

1. Si $n > 10$ alors $U_n > \ldots\ldots$.
2. Si $n > 100$ alors $U_n > \ldots\ldots$.
3. Si $n > \ldots\ldots$ alors $U_n > 10^6$.

Réponses :

1. Si $n > 10$ alors $U_n > 100$.
2. Si $n > 100$ alors $U_n > 10000$.
3. Si $n > 1000$ alors $U_n > 10^6$.

• Il semble que l'on puisse toujours trouver un n assez grand pour que U_n soit aussi grand que l'on veut. On dit alors que U_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Fin du chapitre