Spécialité - 1re générale

Complément de géométrie analytique

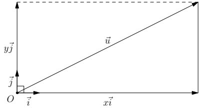
https://www.xm1math.net

1. Rappels

a) Coordonnées d'un vecteur et d'un point dans un repère

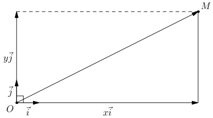
Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$:

• Dire qu'un vecteur $\vec{u}$ a pour abscisse x et ordonnée y équivaut à dire que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Notation : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (ou $\vec{u}(x, y)$).

• Dire qu'un point M a pour abscisse x et ordonnée y équivaut à dire que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Notation : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (ou $M(x, y)$).

b) Déterminant de deux vecteurs

Dans une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, on appelle **déterminant** des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le réel noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$ défini par : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x \times y' - y \times x'$

Exemple(s)

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 1 \times 3 = 5$

1. Rappels

c) Propriétés à connaître

Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$:

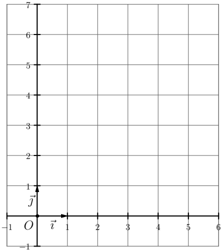
- Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors sa norme (c'est à dire sa longueur) est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
  « coordonnées du 2^{e} point - coordonnées du 1er point »
- si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ alors le milieu de $[AB]$ est $I\begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$
- si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ alors la distance AB est telle que $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- Dire que trois points A, B et C sont alignés équivaut à dire que $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$.
- Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles équivaut à dire que $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$.

xm1math.net

1. Rappels

Exemple(s)

a) Dans le repère ci-contre, placer les points $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$



b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow 5-2\\ \leftarrow 2-1\end{matrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow 1-2\\ \leftarrow 4-1\end{matrix}$

c) Calculer la distance BC.
$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(1-5)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

d) Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

$ABDC$ parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x_D - 1\\ y_D - 4\end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_D - 1 = 3 \\ y_D - 4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 5 \end{cases}$$

e) Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x_M - 1\\ y_M - 4\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3/4\\ 1/4\end{pmatrix} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3/4\\ 9/4\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_M - 1 = 0 \\ y_M - 4 = 5/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = 13/2 \end{cases}$$

1. Rappels

Exemple(s)

f) Vérifier que les droites (DM) et (BC) sont parallèles.

On a $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix} -3 \\ 3/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1-4 \\ \leftarrow 13/2 - 5 \end{matrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1-5 \\ \leftarrow 4-2 \end{matrix}$

Donc, $\det(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 3/2 & 2 \end{vmatrix} = -3 \times 2 - \frac{3}{2} \times (-4) = 0.$

g) Déterminer les coordonnées de I le milieu de $[CD]$:

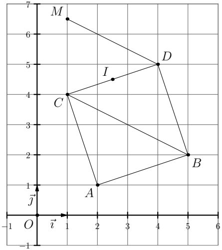
$I\begin{pmatrix} \frac{x_C + x_D}{2} \\ \frac{y_C + y_D}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow I\begin{pmatrix} \frac{1+4}{2} \\ \frac{4+5}{2} \end{pmatrix}$. On a donc, $I\begin{pmatrix} 5/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$

h) Vérifier si les points B, I et M sont alignés ou non .

On a $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} -5/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 5/2 - 5 \\ \leftarrow 9/2 - 2 \end{matrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} -4 \\ 9/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1-5 \\ \leftarrow 13/2 - 2 \end{matrix}$

$\det(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BM}) = \begin{vmatrix} -5/2 & -4 \\ 5/2 & 9/2 \end{vmatrix} = -\frac{5}{2} \times \frac{9}{2} - \frac{5}{2} \times (-4) = -\frac{5}{4} \neq 0.$

B, I et M ne sont pas alignés.



1. Rappels

d) Équations cartésiennes de droites

- Toute droite d admet une équation (dite cartésienne) de la forme $ax + by + c = 0$ (a et b ne pouvant pas être nuls en même temps). Un vecteur directeur de d est alors $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
- Les droites verticales admettent une équation de la forme « $x =$ une constante » ;
- Les droites horizontales admettent une équation de la forme « $y =$ une constante ».
- Pour déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant deux de ses points A et B ($A \neq B$), on exprime que dire qu'un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est sur la droite équivaut à dire que $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$.
- Pour déterminer si la droite d d'équation $ax + by + c = 0$ est parallèle à la droite d' d'équation $a'x + b'y + c' = 0$, on détermine si les vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ des deux droites sont colinéaires en vérifiant si leur déterminant est nul.
- Pour déterminer une équation de la droite d' parallèle à la droite d d'équation $ax + by + c = 0$ et passant par un point A, on détermine un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ de d (qui est donc aussi un vecteur directeur de d') et on exprime que dire qu'un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est sur d' équivaut à dire que $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$.

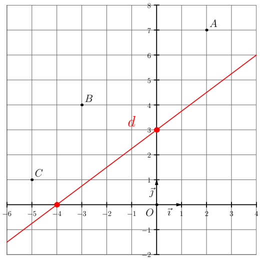
1. Rappels

Exemple(s)

On considère les points $A\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et la droite d d'équation $3x - 4y + 12 = 0$.

a) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) :
$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -5 \\ y-7 & -3 \end{vmatrix} = 0$
$\Leftrightarrow -3(x-2) - (-5)(y-7) = 0 \Leftrightarrow -3x + 5y - 29 = 0$. Une équation de d est $3x + 5y - 29 = 0$

b) Tracer la droite d :
Si $x = 0$, on doit avoir $-4y + 12 = 0$, c'est à dire $y = 3$
Si $y = 0$, on doit avoir $3x + 12 = 0$, c'est à dire $x = -4$



c) Donner un vecteur directeur de d :
Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} -(-4) \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

d) Déterminer une équation de la droite d' parallèle à la droite d et passant par C :
$\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de d'.
$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d' \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{CM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+5 & 4 \\ y-1 & 3 \end{vmatrix} = 0$
$\Leftrightarrow 3(x+5) - 4(y-1) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 19 = 0$. Une équation de d' est $3x - 4y + 19 = 0$

1. Rappels

e) Résolution des systèmes linéaires 2x2 possédant une unique solution

Principe

• Pour trouver x, on cherche à éliminer y. Cela se fait en multipliant les deux équations par des coefficients judicieusement choisis de telle façon qu'en ajoutant ces deux nouvelles équations les termes en y s'éliminent. Ce style d'opération s'appelle une **combinaison linéaire**.

• Pour trouver y, on élimine de la même façon x avec une autre combinaison linéaire.

Exemple(s)

a) Résolution du système $\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + 4y = 2 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases}$:

La combinaison linéaire $L_1 + 2L_2$ permet d'éliminer y et la combinaison linéaire $3L_1 - L_2$ permet d'éliminer x. D'où la résolution :

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x + 4y = 2 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 + 2L_2 \\ 3L_1 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} 7x = -14 \\ 14y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} . \; S = \{(-2; 1)\}$$

b) Résolution du système $\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 2x + 5y = 21 \\ 6x + 2y = -2 \end{cases}$:

La combinaison linéaire $2L_1 - 5L_2$ permet d'éliminer y et la combinaison linéaire $3L_1 - L_2$ permet d'éliminer x. D'où la résolution :

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 2x + 5y = 21 \\ 6x + 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2L_1 - 5L_2 \\ 3L_1 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} -26x = 52 \\ 13y = 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases} . \; S = \{(-2; 5)\}$$

xm1math.net

2. Produit scalaire de 2 vecteurs dans un repère orthonormé

a) Première définition

Définition

Dans un repère orthonormé, on appelle **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

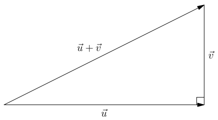
b) Condition d'orthogonalité de 2 vecteurs dans un repère orthonormé

Propriété(s)

Dans un repère orthonormé, dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à dire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration :

- Si aucun des deux vecteurs est nul : dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à dire que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ d'après la relation de Pythagore. Ce qui revient à dire que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Si l'un des vecteurs est nul, il est considéré comme orthogonal à tous les vecteurs et on a bien $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{0}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{0}\|^2\right) = 0$ ou $\frac{1}{2}\left(\|\vec{0}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{0}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = 0$



2. Produit scalaire de 2 vecteurs dans un repère orthonormé

c) Expression analytique du produit scalaire

Propriété(s)

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *alors* $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

Démonstration :

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{x'^2+y'^2}$; $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2}$, donc :

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[(x+x')^2+(y+y')^2-\left(x^2+y^2\right)-\left(x'^2+y'^2\right)\right] = \dfrac{1}{2}\left[2xx'+2yy'\right] = xx'+yy'$

Exemple(s)

a) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et déterminer si $\vec{u}\perp\vec{v}$:
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times 2 + (-1)\times 4 = 2 \neq 0$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

b) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et déterminer si $\vec{u}\perp\vec{v}$:
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \sqrt{2}\times 3\sqrt{2} + (-2)\times 3 = 6-6 = 0$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

c) Soit $A\begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$. Déterminer si le triangle ABC est rectangle en A :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -3/2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\times 2 + 2\times\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$. Le triangle ABC est rectangle en A.

2. Produit scalaire de 2 vecteurs dans un repère orthonormé

d) Règles de calcul

Propriété(s)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tout réel k :

(1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

(2) $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$

(3) $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$

(4) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Démonstration : avec $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$

(1) car $xx' + yy' = yy' + xx'$

(2) car $0 \times x + 0 \times y = 0$

(3) $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = (kx) \times x' + (ky) \times y' = kxx' + kyy'$; $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = x(kx') + y(ky') = kxx' + kyy'$
$k \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) = k \times \left(xx' + yy'\right) = kxx' + kyy'$

(4) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = x(x' + x'') + y(y' + y'') = xx' + yy' + xx'' + yy'' = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Exemple(s)

Sachant que deux vecteurs $\vec{u}$ et v sont tels que $\vec{u} \cdot \vec{u} = 5$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = -7$; $\vec{v} \cdot \vec{v} = 13$, calculer $(3\vec{u}) \cdot \vec{v}$ et $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (3\vec{u} + \vec{v})$.

$(3\vec{u}) \cdot \vec{v} = 3\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 3 \times (-7) = -21$.

$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (3\vec{u} + \vec{v}) = 3\,(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \vec{u} \cdot \vec{v} - 3\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) - \vec{v} \cdot \vec{v} = 3 \times 5 + (-7) - 3(-7) - 13 = 16$

xm1math.net

2. Produit scalaire de 2 vecteurs dans un repère orthonormé

e) Carré scalaire d'un vecteur

Définition

On appelle **carré scalaire** d'un vecteur $\vec{u}$, le nombre réel noté $\vec{u}^2$ défini par $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.

Propriété(s)

Pour tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *on a* $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$ *et* $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ *(le carré scalaire d'un vecteur est aussi égal au carré de sa longueur).*

Démonstration : car $\vec{u} \cdot \vec{u} = x \times x + y \times y = x^2 + y^2$ et $\|\vec{u}\|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$

Conséquence : pour tous points A et B, le carré scalaire $\overrightarrow{AB}^2$ est aussi égal au carré de la distance AB.

Propriété(s)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *:*

- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

(« identités remarquables » pour le carré scalaire)

Démonstration : se démontre en développant

2. Produit scalaire de 2 vecteurs dans un repère orthonormé

Exemple(s)

Soit ABC un triangle tel que $AC = 7$, $AB = 9$ et $CB = 4$.

a) En utilisant la distance CB, donner la valeur du carré scalaire $\overrightarrow{CB}^2$.
Le carré scalaire $\overrightarrow{CB}^2$ est aussi égal au carré de la distance CB. On a donc $\overrightarrow{CB}^2 = 4^2 = 16$.

b) Développer et exprimer en fonction de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ le carré scalaire $\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2$.
$\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$.
Or le carré scalaire $\overrightarrow{AB}^2$ est aussi égal au carré de la distance AB, c'est à dire à 9^2 et le carré scalaire $\overrightarrow{AC}^2$ est aussi égal au carré de la distance AC, c'est à dire à 7^2.
On a donc, $\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2 = 81 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 49 = 130 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

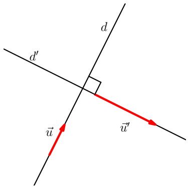
c) Déduire des deux questions précédentes la valeur de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
$\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2$ est aussi égal à $\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{CB}^2$.
On a donc $130 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16 \Leftrightarrow -2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -114$.
On en déduit que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 57$.

3. Produit scalaire et équations cartésiennes de droites

a) Comment déterminer si la droite d d'équation $ax+by+c=0$ est perpendiculaire à la droite d' d'équation $a'x+b'y+c'=0$?

Méthode

On détermine si les vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ des deux droites sont orthogonaux en vérifiant si leur produit scalaire est nul.



Exemple(s)

La droite d d'équation $-8x+2y-1=0$ est-elle perpendiculaire à la droite d' d'équation $3x+12y+5=0$?

Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de d' est $\vec{u}'\begin{pmatrix} -12 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -2\times(-12)+(-8)\times 3 = 0$.

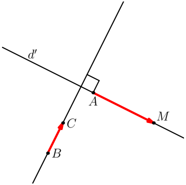
$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ étant orthogonaux, on peut en conclure que les droites d et d' sont perpendiculaires.

3. Produit scalaire et équations cartésiennes de droites

b) Comment déterminer une équation de la droite d' passant par le point A et perpendiculaire à la droite (BC) ?

Méthode

On exprime que dire qu'un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est sur d' équivaut à dire que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.



Exemple(s)

Détermination d'une équation cartésienne de la droite d' passant par le point $A\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ et perpendiculaire à la droite (BC) avec $B\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+7 \\ y-3 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(x+7) - 1 \times (y-3) = 0 \Leftrightarrow 3x - y + 24 = 0.$

Une équation de d' est $3x - y + 24 = 0$

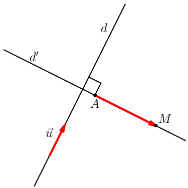
xm1math.net

3. Produit scalaire et équations cartésiennes de droites

c) Comment déterminer une équation de la droite d' passant par A et perpendiculaire à la droite d d'équation $ax + by + c = 0$?

Méthode

On exprime que dire qu'un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est sur d' équivaut à dire que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = 0$.



Exemple(s)

Détermination d'une équation de la d' passant par $A\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et perpendiculaire à la droite d d'équation $11x - 3y + 7 = 0$:

Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$.

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+3 \\ y-4 \end{pmatrix} \cdot \vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(x+3) + 11(y-4) = 0 \Leftrightarrow 3x + 11y - 35 = 0.$

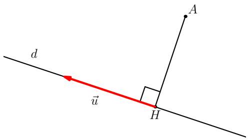
Une équation de d' est $3x + 11y - 35 = 0$

3. Produit scalaire et équations cartésiennes de droites

d) Détermination des coordonnées du projeté orthogonal H d'un point A sur la droite d d'équation $ax + by + c = 0$

Méthode

On exprime, dans un système, que les coordonnées de H doivent vérifier l'équation de d et que l'on doit avoir $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = 0$.



Exemple(s)

Détermination des coordonnées du projeté orthogonal H du point $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sur la droite d d'équation $x + 3y + 5 = 0$:

On doit avoir $\begin{cases} x_H + 3y_H + 5 = 0 \\ \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x_H - 2 \\ y_H - 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H + 3y_H + 5 = 0 \\ -3(x_H - 2) + (y_H - 1) = 0 \end{cases}$

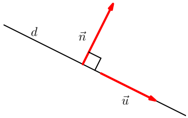
$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} x_H + 3y_H = -5 \\ -3x_H + y_H = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 - 3L_2 \\ 3L_1 + L_2 \end{array} \begin{cases} 10x_H = 10 \\ 10y_H = -20 \end{cases}$. On a donc $H\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. Produit scalaire et équations cartésiennes de droites

e) Vecteur normal d'une droite

Définition

On appelle **vecteur normal** d'une droite d tout vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à un vecteur directeur de d.



Propriété(s)

Un vecteur normal de la droite d d'équation $ax + by + c = 0$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Démonstration : car $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = -ab + ba = 0$

Propriété(s)

Si une droite d admet $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ comme vecteur normal alors elle admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.

Démonstration : A étant un point de d, $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0 \Leftrightarrow ax + by + (-ax_A - by_A) = 0$

4. Équations cartésiennes de cercles

a) Cercle dont on connaît le centre et le rayon

Propriété(s)

Dans un repère orthonormé, le cercle de centre $\Omega \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$ *et de rayon* $r > 0$ *admet pour équation cartésienne* $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$

Démonstration : car dire qu'un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est sur le cercle équivaut à dire que $\Omega M^2 = r^2$

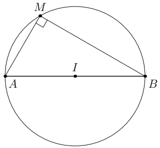
Exemple(s)

Une équation du cercle de centre $\Omega \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et de rayon $r = \sqrt{3}$ est $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 3$.

b) Cercle dont on connaît 2 points A et B formant un diamètre

Propriété(s)

Dire qu'un point M *est sur le cercle de diamètre* $[AB]$ *équivaut à dire que* $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$



4. Équations cartésiennes de cercles

Démonstration : Soit I le milieu de $[AB]$.
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = 0$
$\Leftrightarrow MI^2 = IA^2 \Leftrightarrow IM^2 = \text{rayon}^2 \Leftrightarrow IM = \text{rayon} \Leftrightarrow M$ est sur le cercle de diamètre $[AB]$.

Conséquence

Pour déterminer une équation cartésienne d'un cercle connaissant 2 points A et B formant un diamètre, il suffit d'exprimer qu'un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est sur le cercle équivaut à dire que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ *(sans avoir à calculer les coordonnées du centre et le rayon).*

Exemple(s)

Détermination d'une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ avec $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$:
$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} 1-x \\ -2-y \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} 3-x \\ 4-y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-x)(3-x) + (-2-y)(4-y) = 0$
$\Leftrightarrow 3 - x - 3x + x^2 - 8 + 2y - 4y + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$
Une équation de $\mathcal{C}$ est $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$.

4. Équations cartésiennes de cercles

c) Forme générale des équations cartésiennes de cercles

Propriété(s)

On admet que, pour tous réels a, b et c, l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *dans un repère orthonormé tels que* $x^2+y^2+ax+by+c=0$ *est un cercle, un point ou l'ensemble vide.*

Exemple(s)

Montrer que l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $x^2+y^2+6x-10y-2=0$ est un cercle dont on donnera le centre Ω et le rayon r :

- On cherche d'abord à écrire x^2+6x sous la forme $(x+\dots)^2-\dots$:
  Pour cela on utilise que le double produit du développement de $(x+\dots)^2$ doit donner $6x$. On en déduit qu'il nous faut $x+3$ dans la parenthèse. Il faut dès lors enlever 3^2 à $(x+3)^2$ pour retomber sur x^2+6x. On va pouvoir ainsi remplacer x^2+6x par $(x+3)^2-9$.
- On cherche ensuite à écrire y^2-10y sous la forme $(y-\dots)^2-\dots$:
  Pour cela on utilise que le double produit du développement de $(y-\dots)^2$ doit donner $-10y$. On en déduit qu'il nous faut $y-5$ dans la parenthèse. Il faut dès lors enlever 5^2 à $(y-5)^2$ pour retomber sur y^2-10y. On va pouvoir ainsi remplacer y^2-10y par $(y-5)^2-25$.
- L'équation donnée du cercle devient
  $(x+3)^2-9+(y-5)^2-25-2=0 \Leftrightarrow (x-(-3))^2+(y-5)^2=6^2$.
  Ce qui est de la forme $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=r^2$. On en déduit que l'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et de rayon $r=6$.

Fin du chapitre