Spécialité - 1re générale

# Complément sur les fonctions



https://www.xm1math.net





## 1. Rappels

### a) Généralités

Définition

Étant donné $I$ un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$, une fonction numérique $f$ définie sur $I$ est une relation qui à tout $x$ de $I$ associe un **unique** réel, noté $f(x)$ et appelé **image** de $x$ par $f$.
Notations possibles :

- $f$ est la fonction définie sur $I$ par $f(x) = \cdots$
- $f: \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \cdots \end{array}$

Définition

Étant donné une fonction $f$ définie sur $I$.
Pour tout réel $b$, on appelle **antécédents** de $b$ par $f$, tous les réels $x$ de $I$ (s'ils existent) tels que $f(x) = b$.

# 1. Rappels

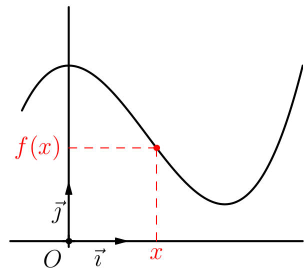
## Exemple(s)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

1. L'image de $\sqrt{2}$ par $f$ est $f\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}^2+1} = \dfrac{1}{3}$.
2. Les antécédents de $\dfrac{1}{4}$ par $f$ sont les réels $x$ tels que $f(x) = \dfrac{1}{4}$.
   Or, $f(x) = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x^2+1 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$.
   On en conclut que les antécédents de $\dfrac{1}{4}$ par $f$ sont $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

## Définition

Dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on appelle courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $I$, l'ensemble des points **d'abscisse** $x$ **et d'ordonnée** $f(x)$ pour tous les $x$ de $I$.
Notation courante : $C_f$ .
Une équation cartésienne de la courbe est $y = f(x)$.









# 1. Rappels

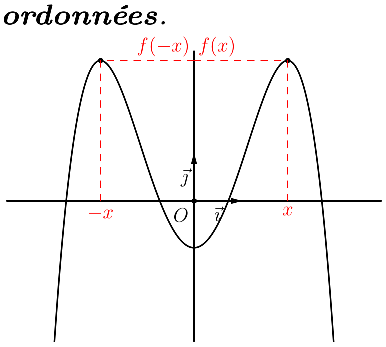
## b) Parité d'une fonction

### Définition

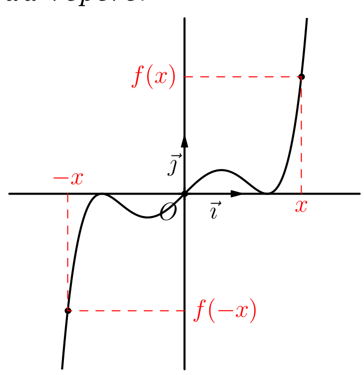
- Une fonction $f$ définie sur une partie $I$ de $\mathbb{R}$ est dite **paire** si $I$ est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout $x$ de $I$, on a $f(-x) = f(x)$.
- Une fonction $f$ définie sur une partie $I$ de $\mathbb{R}$ est dite **impaire** si $I$ est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout $x$ de $I$, on a $f(-x) = -f(x)$.

### Propriété(s)

- *Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est* ***symétrique par rapport à l'axe des ordonnées****.*




- *La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.*



# 1. Rappels

## c) Détermination de la position relative de deux courbes

### Principe

Pour étudier la position des courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$.

- Si, pour tout $x$ d'un intervalle $I$, $f(x) - g(x)$ reste positif alors on peut conclure que la courbe de $f$ est située au dessus de la courbe de $g$ sur $I$.
- Si, pour tout $x$ d'un intervalle $I$, $f(x) - g(x)$ reste négatif alors on peut conclure que la courbe de $f$ est située en dessous de la courbe de $g$ sur $I$.

### Exemple(s)

Étude de la position relative des courbes des fonctions $f$ et $g$ définies sur $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = x$ :
Pour tout $x$, $f(x) - g(x) = x^2 - x - 2$. $\Delta = 9 > 0$. Le trinôme est du signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines qui sont $x_1 = \dfrac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 2$.
On a donc la situation suivante :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f(x) - g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Position relative | | $C_f$ au dessus de $C_g$ | | $C_f$ en dessous de $C_g$ | | $C_f$ au dessus de $C_g$ | |







# 2. Fonctions périodiques

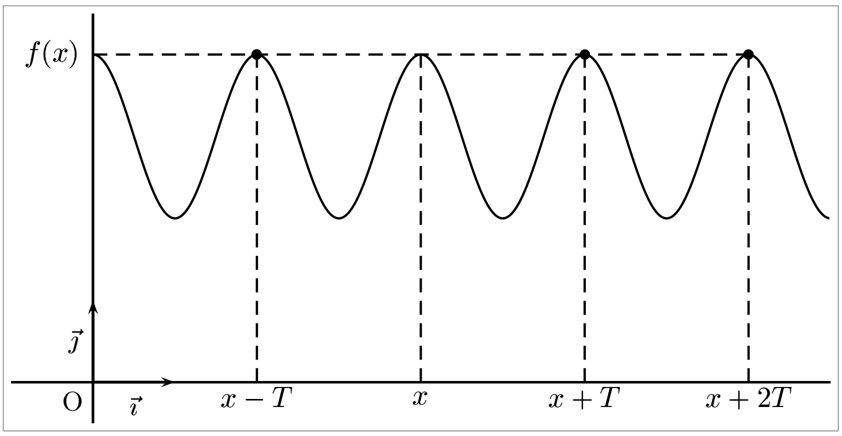
## a) Généralités

### Définition

Une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ est dite **périodique de période** $T$ si pour tout $x$, $f(x + T) = f(x)$.

### Conséquences

- Pour tout $x$, $f(x + 2T) = f(x + T + T) = f(x + T) = f(x)$
- Pour tout $x$, $f(x + 3T) = f(x + 2T + T) = f(x + 2T) = f(x)$
- Conséquence : si $T$ est une période alors $2T$, $3T$, $\cdots$ sont aussi des périodes.
- On doit avoir aussi $f(x - T + T) = f(x - T)$, ce qui équivaut à dire que $f(x) = f(x - T)$.
- De même on a $f(x - 2T) = f(x)$, $f(x - 3T) = f(x)$, $\cdots$



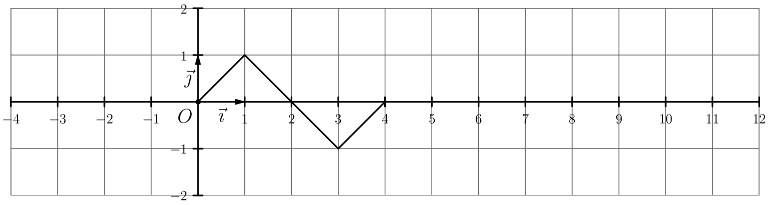
## 2. Fonctions périodiques

### Propriété(s)

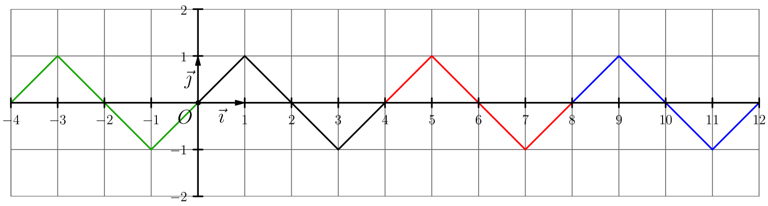
*Si on connaît la courbe d'une fonction périodique $f$ de période $T$ sur un intervalle d'amplitude $T$, on peut retrouver toute la courbe de $f$ en effectuant des translations de vecteur $T\vec{i}$, $2T\vec{i}$, $\cdots$, $-T\vec{i}$, $\cdots$ (ce qui revient à effectuer des « décalages horizontaux » de $T$, $2T$, $\cdots$, $-T$, $\cdots$)*

### Exemple(s)

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 4 dont un extrait de la courbe est donnée ci-dessous :



Retrouver les parties de la courbe correspondantes aux intervalles $[4;8]$, $[8;12]$ et $[-4;0]$ .
Solution :







## 2. Fonctions périodiques

### b) Cas des fonctions circulaires

### Propriété(s)

*Les fonctions, dites circulaires, définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = r\cos(\omega x + \varphi)$ ou $r\sin(\omega x + \varphi)$ sont périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.*

**Démonstration** : pour tout $x$, $r\cos\left(\omega\left(x + \frac{2\pi}{w}\right) + \varphi\right) = r\cos(\omega x + 2\pi + \varphi) = r\cos(\omega x + \varphi)$ et $r\sin\left(\omega\left(x + \frac{2\pi}{w}\right) + \varphi\right) = r\sin(\omega x + 2\pi + \varphi) = r\sin(\omega x + \varphi)$.

### Exemple(s)

1. La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(3x)$ est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{3}$.
2. La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5\sin(2x - \frac{\pi}{4})$ est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.
3. La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$ est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.
4. La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(\frac{1}{3}x)$ est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.
5. La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(\frac{1}{2}x) + \cos(\frac{1}{3}x)$ est périodique de période $T = 12\pi$ (multiple commun de $4\pi$ et $6\pi$) .

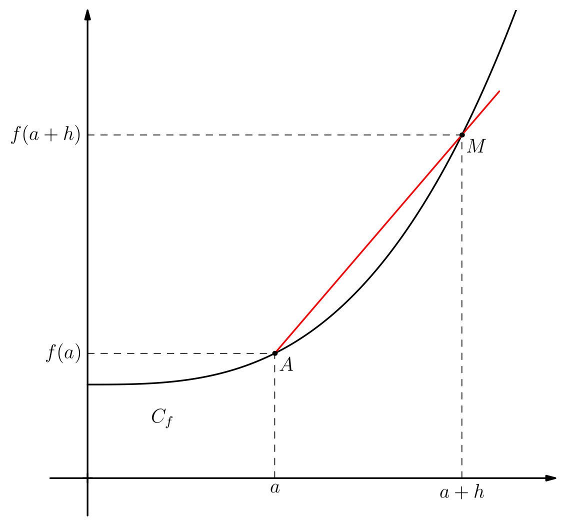
# 3. Taux de variation d'une fonction

### Définition

Étant donné une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$. Pour tous réels $a$ et $h \neq 0$ tels que $a$ et $a+h$ soient dans $I$, on appelle **taux de variation** de $f$ entre $a$ et $a+h$, le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

### Propriété(s)

*Le taux de variation de $f$ entre $a$ et $a+h$ correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points de la courbe de $f$ d'abscisses $a$ et $a+h$.*




**Preuve** :
coefficient directeur de la droite $(AM)$
$= \dfrac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}$
$= \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.







# 3. Taux de variation d'une fonction

### Propriété(s)

- ***Si $f$ est croissante sur un intervalle*** *$I$ alors pour tous réels $a$ et $h \neq 0$ tels que $a$ et $a+h$ soient dans $I$,* ***le taux de variation de $f$ entre*** *$a$* ***et*** *$a+h$* ***est positif.***
- ***Si $f$ est décroissante sur un intervalle*** *$I$ alors pour tous réels $a$ et $h \neq 0$ tels que $a$ et $a+h$ soient dans $I$,* ***le taux de variation de $f$ entre*** *$a$* ***et*** *$a+h$* ***est négatif.***

**Démonstration** :

- Si $f$ est croissante sur $I$ :
  - si $h > 0$ alors $f(a+h) \geqslant f(a)$, donc
    $$\frac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{+}}{\underbrace{h}_{+}} \geqslant 0.$$
  - si $h < 0$ alors $f(a+h) \leqslant f(a)$, donc
    $$\frac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{-}}{\underbrace{h}_{-}} \geqslant 0.$$
- Si $f$ est décroissante sur $I$ :
  - si $h > 0$ alors $f(a+h) \leqslant f(a)$, donc
    $$\frac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{-}}{\underbrace{h}_{+}} \leqslant 0.$$
  - si $h < 0$ alors $f(a+h) \geqslant f(a)$, donc
    $$\frac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{+}}{\underbrace{h}_{-}} \leqslant 0.$$

# 3. Taux de variation d'une fonction

Exemple(s)

1. Calcul du taux de variation entre $a$ et $a+h$ pour la fonction carré : pour tous réels $a$ et $h \neq 0$,
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a+h$$
2. Calcul du taux de variation entre $a$ et $a+h$ pour la fonction inverse : pour tous réels $a>0$ et $h \neq 0$ tel que $a+h>0$,
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{a-a-h}{ha(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}$$
(on a le même résultat si $a>0$)
3. Calcul du taux de variation entre $a$ et $a+h$ pour la fonction racine carrée : pour tous réels $a \geqslant 0$ et $h \neq 0$ tel que $a+h \geqslant 0$,
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \times \frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{a+h-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}$$
$$= \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$







# 4. Nouvelles fonctions de référence

## a) Fonction valeur absolue

### Rappel

On appelle **valeur absolue** d'un réel $x$, le réel noté $|x|$, tel que :

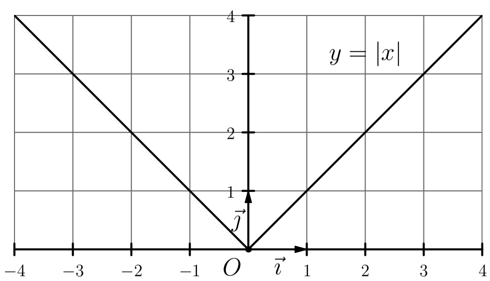
- si $x \geqslant 0$ alors $|x| = x$ ;
- Si $x < 0$ alors $|x| = -x$ .

Exemples : $|3| = 3$ ; $|-3| = 3$

- La fonction valeur absolue est la fonction qui à tout réel $x$ associe $|x|$.
- Elle est définie sur $\mathbb{R}$.
- Elle est paire car, pour tout $x$, $|-x| = x$ .

(En effet, si $x \geqslant 0$, $\left|\underbrace{x}_{+}\right| = x$ et $\left|\underbrace{-x}_{-}\right| = -(-x)$ et si $x<0$, $\left|\underbrace{x}_{-}\right| = -x$ et $\left|\underbrace{-x}_{+}\right| = -x$)

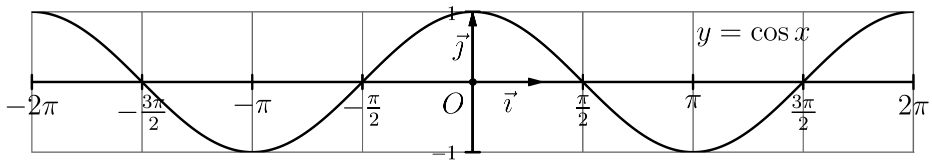
- Sa courbe représentative $[-4;4]$ est :



# 4. Nouvelles fonctions de référence

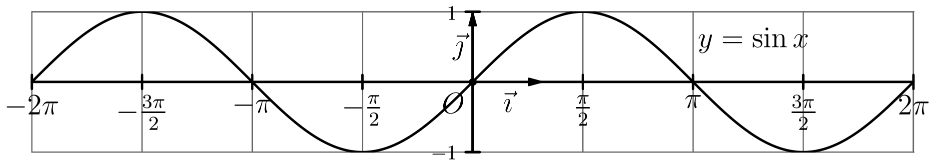
## b) Fonction cosinus

- La fonction cosinus est la fonction qui à tout réel $x$ associe $\cos x$.
- Elle est définie sur $\mathbb{R}$.
- Elle est paire car, pour tout $x$, $\cos(-x) = \cos x$.
- Elle est périodique de période $2\pi$ car, pour tout $x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.
- Sa courbe représentative sur $[-2\pi; 2\pi]$ est :




## c) Fonction sinus

- La fonction sinus est la fonction qui à tout réel $x$ associe $\sin x$.
- Elle est définie sur $\mathbb{R}$.
- Elle est impaire car, pour tout $x$, $\sin(-x) = \sin x$.
- Elle est périodique de période $2\pi$ car, pour tout $x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
- Sa courbe représentative sur $[-2\pi; 2\pi]$ est :










# Fin du chapitre