Spécialité - 1re générale

Complément sur le produit scalaire

https://www.xm1math.net

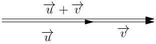
1. Produit scalaire et vecteurs colinéaires

Propriété(s)

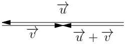
- *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls,* ***colinéaires et de même sens*** *alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.*
- *Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls,* ***colinéaires et de sens contraire*** *alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.*

Démonstration : on rappelle que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ et donc,
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right] = \dfrac{1}{2}\left[2 \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|\right] = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$



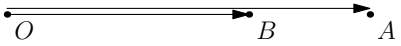
- S'ils sont colinéaires et de sens contraire alors $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|$ ou $\|\vec{v}\| - \|\vec{u}\|$
et, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left[(\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|)^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right] = \dfrac{1}{2}\left[-2 \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|\right] = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$



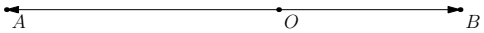
Conséquence

Étant donné O, A et B, trois points **alignés** et distincts :

- Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont de **même sens** alors $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB$
(« produit scalaire = produit des distances »).



- Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont de **sens contraire** alors
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = -OA \times OB$
(« produit scalaire = − produit des distances »).

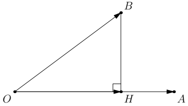


2. Produit scalaire et projection orthogonale

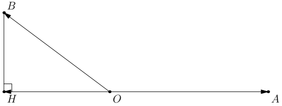
Propriété(s)

Étant donné un point O, A et B 2 points distincts de O et H le projeté orthogonal de B sur (OA) :

- *Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de **même sens** alors*
  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = OA \times OH$



- *Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont de **sens contraire** alors*
  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = -OA \times OH$

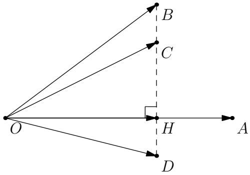


Démonstration : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}\right) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB}$. Or, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{HB}$, donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$.

On a donc, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$ et on est ramené au cas de 2 vecteurs colinéaires.

Conséquence

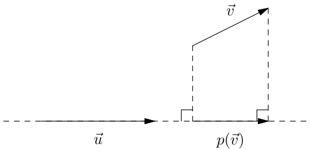
Dans la configuration ci-contre, on a :
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$



2. Produit scalaire et projection orthogonale

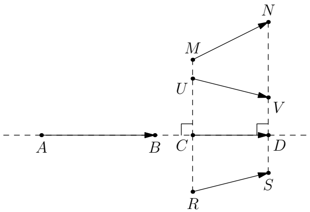
Généralisation

Étant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Si on note $p(\vec{v})$ la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur une droite portant $\vec{u}$, alors on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot p(\vec{v})$



Conséquence

Dans la configuration ci-contre, on a :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{UV} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$



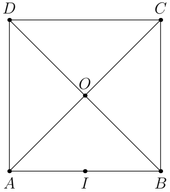
xm1math.net

2. Produit scalaire et projection orthogonale

Exemple(s)

Dans la figure ci-contre :

- $ABCD$ un carré de centre O et de coté 4 ;
- I est le milieu de $[AB]$;



1. Détermination de la valeur de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$:
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires de même sens, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = AB \times AI = 4 \times 2 = 8$

2. Détermination de la valeur de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$:
$\overrightarrow{AO}$ se projette orthogonalement en $\overrightarrow{AI}$ sur (AB), donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = 8$

3. Détermination de la valeur de $\overrightarrow{AB}^2$:
$\overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 16$

4. Détermination de la valeur de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$:
$\overrightarrow{AC}$ se projette orthogonalement en $\overrightarrow{AB}$ sur (AB), donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 16$

5. Détermination de la valeur de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$:
$\overrightarrow{OD}$ se projette orthogonalement en $\overrightarrow{IA}$ sur (AB), donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IA}$
Or, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IA}$ sont colinéaires de sens contraire, donc
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IA} = -AB \times IA = -4 \times 2 = -8$
On a donc finalement $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD} = -8$

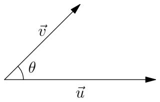
6. Détermination de la valeur de $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CA}$:
$\overrightarrow{CA}$ se projette orthogonalement en $\overrightarrow{BA}$ sur (BI), donc $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$
Or, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires de même sens, donc $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = BI \times BA = 2 \times 4 = 8$
On a donc finalement $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CA} = 8$

3. Produit scalaire, distances et angles

a) Autre définition du produit scalaire

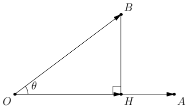
Propriété(s)

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls et si θ est une mesure de l'angle géométrique entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$



Démonstration : Étant donné un point O, A et B les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et H le projeté orthogonal de B sur (OA). On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$

- Si θ est aigu :

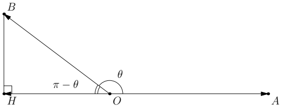


On a $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = OA \times OH$.

Or, $\cos\theta = \dfrac{OH}{OB}$ et donc $OH = OB \times \cos\theta$.

On a donc,
$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB \times \cos\theta = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$

- Si θ est obtus :



On a $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = -OA \times OH$.

Or, $\cos(\pi - \theta) = \dfrac{OH}{OB}$ et donc
$OH = OB \times \cos(\pi - \theta) = -OB \times \cos\theta$ car $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
On a donc,
$\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times (-\ OB \times cos\theta) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$

3. Produit scalaire, distances et angles

Exemple(s)

1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans les cas suivants :

a) $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 2$, $\theta = \frac{\pi}{6}$. *Réponse :* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

b) $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$. *Réponse :* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \times \sqrt{2} \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6 \times 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -6$

2. Déterminer le cosinus de l'angle géométrique entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Réponse : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$ donc $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \dfrac{1 \times 3 + \sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \times \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2}}$

$= \dfrac{6}{2 \times 2\sqrt{3}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(donc la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\frac{\pi}{6}$ ou $-\frac{\pi}{6}$).

3. Déterminer une mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ avec $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \dfrac{2 \times 1 + 1 \times 3}{\sqrt{2^2 + 1^2} \times \sqrt{1^2 + 3^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}}$

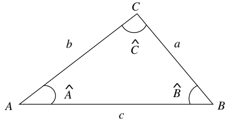
$= \dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On peut en déduire qu'une mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\frac{\pi}{4}$.

3. Produit scalaire, distances et angles

b) Théorème d'Al-Kashi

Théorème

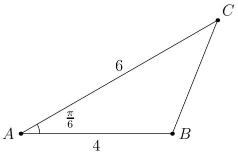
Dans un triangle quelconque ABC et avec les notations de la figure ci-contre, on a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.



Démonstration :
$a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$.
Or, $\overrightarrow{AC}^2 = AC^2 = b^2$, $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = c^2$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = AC \times AB \times \cos\widehat{A} = bc\cos\widehat{A}$
Au final, on a bien $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.

Exemple(s)

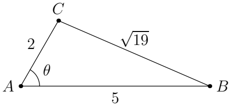
1. Dans la configuration ci-contre, déterminer la distance BC.
Réponse :
$BC^2 = 6^2 + 4^2 - 2\times 6\times 4\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 36 + 16 - 48\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 52 - 24\sqrt{3}$.
On en déduit que $BC = \sqrt{52 - 24\sqrt{3}}$



3. Produit scalaire, distances et angles

Exemple(s)

2. Dans la configuration ci-contre, déterminer une mesure de θ.
Réponse : On a $(\sqrt{19})^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \times 2 \times 5 \times \cos\theta$
$\Leftrightarrow 19 = 4 + 25 - 20\cos\theta \Leftrightarrow -10 = -20\cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$.
On en déduit que l'angle géométrique θ mesure $\frac{\pi}{3}$.



Fin du chapitre