Applications de la dérivation

▶ Exercice n°1

1. $h(8) = 0$.
2. On a $h'(t) = 39{,}2 - 9{,}8t$ qui s'annule pour $t = \dfrac{39{,}2}{9{,}8} = 4$.

t	0		4		8
Signe de $h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	0	$\nearrow$	$78,4$	$\searrow$	0

La hauteur maximale atteinte sera de $h(4) = 78{,}4$ m.

▶ Exercice n°2

1. Si $x = 25$, on doit avoir $25 + y + 25 = 360 \Leftrightarrow y = 310$.
   On a alors, $S(x) = x \times y = 25 \times 310 = 7750\,\mathrm{m}^2$.
2. Si x dépassait 180, $2x$ serait plus grand que 360, la longueur totale du cordon, ce qui est impossible.
3. On doit avoir $x + y + x = 360 \Leftrightarrow y = 360 - 2x$.
   Et donc, $S(x) = x \times y = x(360 - 2x) = -2x^2 + 360x$.
4. $S'(x) = -4x + 360$ qui s'annule pour $x = \dfrac{360}{4} = 90$.

x	0		90		180
Signe de $S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	0	$\nearrow$	16200	$\searrow$	0

$S(x)$ est maximale pour $x = 90$ et sa valeur maximale est $S(90) = 16200\,\mathrm{m}^2$.

▶ Exercice n°3

1. $f'(x) = -3x^2 + 18x - 24$. $\Delta = 18^2 - 4 \times (-3) \times (-24) = 36 > 0$.
   « Du signe de $a = -3$ à l'extérieur des racines »
   $x_1 = \dfrac{-18 - 6}{-6} = 4$ et $x_2 = \dfrac{-18 + 6}{-6} = 2$.

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	-8	$\nearrow$	-4	$\searrow$	

2. $y = f(3) + f'(3)(x - 3) \Leftrightarrow y = -6 + 3(x - 3) \Leftrightarrow y = 3x - 15$
3. Cela revient à déterminer les x tels que $f'(x) = -9 \Leftrightarrow -3x^2 + 18x - 15 = 0$.
   $\Delta = 18^2 - 4 \times (-3) \times (-15) = 144$. Racines : $\dfrac{-18 - 12}{-6} = 5$ et $\dfrac{-18 + 12}{-6} = 1$.
   Les points d'abscisse 5 et 1 conviennent.

▶ Exercice n°4

1. $f(0{,}01) = 0{,}5$. L'affirmation est vraie.
2. $f'(x) = \dfrac{99 \times (98x + 1) - 99x \times 98}{(98x + 1)^2} = \dfrac{99}{(98x + 1)^2}$.

x	0		1
99		$+$	‖
$(98x+1)^2$		$+$	‖
Signe de $f'(x)$		$+$	‖
$f(x)$	0	$\nearrow$	‖

3. Cela revient à chercher les x dans $[0\,;1[$ tels que $\dfrac{99x}{98x + 1} > 0{,}9$
   $\Leftrightarrow 99x > 0{,}9\,(98x + 1)$ (car $98x + 1 > 0$)
   $\Leftrightarrow 99x > 88{,}2x + 0{,}9 \Leftrightarrow 10{,}8x > 0{,}9 \Leftrightarrow x > \dfrac{0{,}9}{10{,}8} \approx 0{,}083$.
4.
   - *Affirmation 1 :* Fausse. f est bien dérivable en 0 et on a $f'(0) = 99$.
   - *Affirmation 2 :* Fausse. La dérivée ne pouvant pas s'annuler, la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0,9 ne peut pas être horizontale (ni aucune autre tangente d'ailleurs)

▶ Exercice n°5

1. $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1) - (x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$4x$		$-$	0	$+$	
$(x^2+1)^2$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

2. f est paire car $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, et pour tout x,
$f(-x) = \dfrac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = f(x)$.

▶ Exercice n°6

1. $f'(x) = \dfrac{(2x-2)\times(x-2) - (x^2-2x+1)\times 1}{(x-2)^2}$
$= \dfrac{2x^2-4x-2x+4-x^2+2x-1}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$
Signe de x^2-4x+3 : $\Delta = (-4)^2 - 4\times 1\times 3 = 4$
« Du signe de $a=1$ à l'extérieur des racines »
$x_1 = \dfrac{-(-4)-\sqrt{4}}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-(-4)+\sqrt{4}}{2} = 3$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	‖	$\searrow$	4	$\nearrow$	

2. On étudie le signe de $f(x) - x = \dfrac{x^2-2x+1}{x-2} - x = \dfrac{x^2-2x+1}{x-2} - \dfrac{x(x-2)}{(x-2)}$
$= \dfrac{x^2-2x+1-x^2+2x}{x-2} = \dfrac{1}{x-2}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
1		$+$	‖	$+$	
$x-2$		$-$	‖	$+$	
Signe de $f(x)-x$		$-$	‖	$+$	
Position relative		C_f en dessous de d	‖	C_f au dessus de d	

▶ Exercice n°7

1. $f'(x) = \dfrac{(2x-2)(2x^2-6x) - (x^2-2x+1)(4x-6)}{(2x^2-6x)^2}$
$= \dfrac{4x^3-12x^2-4x^2+12x-4x^3+6x^2+8x^2-12x-4x+6}{(2x^2-6x)^2}$
$= \dfrac{-2x^2-4x+6}{(2x^2-6x)^2}$
Signe de $-2x^2-4x+6$:
$\Delta = 64$; $x_1 = \dfrac{4-8}{-4} = 1$; $x_2 = \dfrac{4+8}{-4} = -3$
« Du signe de $a=-2$ à l'extérieur des racines »

x	$-\infty$		-3		0		1		3		$+\infty$
$-2x^2-4x+6$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$(2x^2-6x)^2$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	‖	$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{4}{9}$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	‖	$\searrow$	

2. D'après le tableau de variations, f admet un minimum positif sur $]-\infty;0[$.
Donc $f(x)$ est bien positif pour tout $x<0$.

▶ Exercice n°8

1. $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$.
   $\Delta = 0\,;\ x_1 = \dfrac{-6}{2\times 3} = -1$.
   « Toujours du signe de $a = 3$ et s'annule pour $x = -1$ ».

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

2. $f(-1) = -1 + 3 - 3 + 1 = 0$. On peut en déduire que :
   - $f(x)$ est négatif sur $]-\infty; -1[$;
   - $f(x)$ est positif sur $]-1; +\infty[$;

▶ Exercice n°9

$C'(v) = 0{,}06 + 150 \times \left(-\dfrac{1}{v^2}\right) = \dfrac{0{,}06v^2 - 150}{v^2}$.

$\Delta = 36\,;\ v_1 = \dfrac{0-6}{0{,}12} = -50\,;\ v_2 = \dfrac{0+6}{0{,}12} = 50$

« Du signe de $a = 0{,}06$ à l'extérieur des racines »

v	20		50		130
Signe de $C'(v)$		$-$	0	$+$	
$C(v)$	$8,7$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$8,95$

▶ Exercice n°10

1. $V = \pi x^2 h$, donc $\dfrac{2V}{x} = \dfrac{\pi x^2 h}{x} = 2\pi x h$.
2. $S = \pi x^2 + 2\pi x h = \pi x^2 + \dfrac{2V}{x}$.
3. $f'(x) = 2\pi x + 2V \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 2\pi x - \dfrac{2V}{x^2}$.
   On en déduit que $f'(h) = 2\pi h - \dfrac{2V}{h^2} = 2\pi h - \dfrac{2\pi h^2 h}{h^2} = 0$.
   (S atteint en fait un maximum local si le rayon est égal à la hauteur)

▶ Exercice n°11

« *Si f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$ alors il existe au moins un x tel que $f'(x) \neq 0$* »

▶ Exercice n°12

$f'(x) = 2ax + b$ qui est du 1^{er} degré et qui s'annule pour $x = -\dfrac{b}{2a}$.

La dérivée s'annule donc en changeant de signe pour $x = -\dfrac{b}{2a}$:

Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	