

# Dérivation : Résumé de cours et méthodes

## 1 Nombre dérivé - Fonction dérivée :

### DÉFINITION

- Etant donné  $f$  est une fonction définie sur un intervalle  $I$  contenant le réel  $a$ ,  $f$  est dérivable en  $a$  si  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  tend vers un réel, appelé alors nombre dérivé de  $f$  en  $a$  et noté  $f'(a)$ , lorsque  $h$  tend vers 0.
- Si  $f$  est dérivable pour tous les éléments de  $I$ , on dit que  $f$  est dérivable sur  $I$  et on appelle dérivée de  $f$  la fonction, notée  $f'$ , qui à tout  $a$  de  $I$  associe  $f'(a)$ , le nombre dérivé de  $f$  en  $a$ .

**Exemple :** Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$ .

Pour tout  $a$ ,  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$ . Ce quotient tend vers  $2a$  quand  $h$  tend vers 0. Pour tout  $a$ ,  $f$  est donc dérivable en  $a$  et  $f'(a) = 2a$ .

On dit que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que sa fonction dérivée est définie par  $f'(x) = 2x$ .

## 2 Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction	Fonction dérivée	pour tout $x$ de	Exemples
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$	$f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ $f(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(x) = 2$
$f(x) = x^n$ ( $n$ entier $\geq 2$ )	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ( $n$ entier $\geq 2$ )	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ $f(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{x^4}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$	

### 3 Étude forme par forme des opérations sur les fonctions dérivables :

**Avertissement :** Nous utiliserons par souci de simplification le traditionnel et affreux abus de langage qui consiste par exemple à dire que la dérivée de  $x^2$  est égale à  $2x$  (alors que nous devrions dire en fait que la dérivée de la fonction qui à  $x$  associe  $x^2$  est la fonction qui à  $x$  associe  $2x$ ).

Il ne faut jamais oublier que l'on ne doit pas confondre une **fonction**  $f$  avec  $f(x)$  (l'image de  $x$  par  $f$  qui est un **réel**) et que la dérivée  $f'$  est elle-même une **fonction** qui à tout  $x$  associe  $f'(x)$  (le nombre dérivé de  $f$  en  $x$ , qui est un **réel**).

Toujours par souci de simplification, nous ne nous précisons pas dans les exemples les intervalles où les fonctions sont dérivables afin de nous concentrer sur l'utilisation des formules.

#### 3-1 Forme $f + g$

PROPRIÉTÉ

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  alors la fonction  $f + g$  est aussi dérivable sur  $I$  et  $(f + g)' = f' + g'$ .

**Exemples de fonctionnement de cette formule :**

- 1) La dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 + x$  est définie par :

$$f'(x) = \underbrace{2x}_{\text{dérivée de } x^2} + \underbrace{1}_{\text{dérivée de } x}$$

- 2) La dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^3 + 4x$  est définie par :

$$f'(x) = \underbrace{3x^2}_{\text{dérivée de } x^3} + \underbrace{4}_{\text{dérivée de } 4x}$$

- 3) La dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$  est définie par :

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{dérivée de } \sqrt{x}} + \underbrace{\frac{(-1)}{x^2}}_{\text{dérivée de } \frac{1}{x}}$$

#### 3-2 Forme $kf$ ( $k$ réel)

PROPRIÉTÉ

Si  $f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et si  $k$  est un réel alors la fonction  $kf$  est aussi dérivable sur  $I$  et  $(kf)' = kf'$ .

**Exemples de fonctionnement de cette formule :**

- 1) La dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 3x^2$  est définie par :

$$f'(x) = 3 \times \underbrace{2x}_{\text{dérivée de } x^2} = 6x$$

- 2) La dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = -5x^3$  est définie par :

$$f'(x) = -5 \times \underbrace{3x^2}_{\text{dérivée de } x^3} = -15x^2$$

- 3) La dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{2}{x} = 2 \times \frac{1}{x}$  est définie par :

$$f'(x) = 2 \times \underbrace{\frac{(-1)}{x^2}}_{\text{dérivée de } \frac{1}{x}} = -\frac{2}{x^2}$$

#### 3-3 Forme $fg$

PROPRIÉTÉ

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  alors la fonction  $fg$  est aussi dérivable sur  $I$  et  $(fg)' = f'g + fg'$ .

### Exemples de fonctionnement de cette formule :

- 1) La dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x\sqrt{x}$  est définie par :

$$f'(x) = \underbrace{1}_{\text{dérivée de } x} \times \sqrt{x} + x \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{dérivée de } \sqrt{x}}$$

- 2) La dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2(3 + \sqrt{x})$  est définie par :

$$f'(x) = \underbrace{2x}_{\text{dérivée de } x^2} \times (3 + \sqrt{x}) + x^2 \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{dérivée de } 3 + \sqrt{x}}$$

### 3-4 Forme $f^2$

#### PROPRIÉTÉ

Si  $f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  alors la fonction  $f^2$  est aussi dérivable sur  $I$  et  $(f^2)' = 2f'f$ .

### Exemples de fonctionnement de cette formule :

- 1) La dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = (3x + 1)^2$  est définie par :

$$f'(x) = 2 \times \underbrace{3}_{\text{dérivée de } 3x+1} \times (3x + 1) = 6(3x + 1)$$

- 2) La dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = (x^3 + 4x)^2$  est définie par :

$$f'(x) = 2 \times \underbrace{(3x^2 + 4)}_{\text{dérivée de } x^3 + 4x} \times (x^3 + 4x)$$

### 3-5 Forme $\frac{1}{f}$

#### PROPRIÉTÉ

Si  $f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  (où  $f(x)$  ne s'annule pas) alors la fonction  $\frac{1}{f}$  est aussi dérivable sur  $I$  et

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

### Exemples de fonctionnement de cette formule :

- 1) La dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{5x-1}$  est définie par :

$$f'(x) = -\frac{\underbrace{5}_{\text{dérivée de } 5x-1}}{(5x-1)^2}$$

- 2) La dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$  est définie par :

$$f'(x) = -\frac{\underbrace{2x}_{\text{dérivée de } x^2+3}}{(x^2+3)^2}$$

### 3-6 Forme $\frac{f}{g}$

#### PROPRIÉTÉ

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  (où  $g(x)$  ne s'annule pas) alors la fonction  $\frac{f}{g}$  est aussi dérivable sur  $I$

et  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ .

### Exemples de fonctionnement de cette formule :

- 1) La dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{7x}{2x+3}$  est définie par :

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(7)}^{\text{dérivée de } 7x} \times (2x+3) - (7x) \times \overbrace{(2)}^{\text{dérivée de } 2x+3}}{(2x+3)^2} = \frac{14x+21-14x}{(2x+3)^2} = \frac{21}{(2x+3)^2}$$

- 2) La dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2}{3x+1}$  est définie par :

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(2x)}^{\text{dérivée de } x^2} \times (3x+1) - (x^2) \times \overbrace{(3)}^{\text{dérivée de } 3x+1}}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2+2x-3x^2}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2+2x}{(3x+1)^2}$$

## 4 Tableau récapitulatif des opérations sur les fonctions dérivables :

Fonction	Fonction dérivée
$f + g$	$f' + g'$
$kf$ ( $k \in \mathbb{R}$ )	$kf'$
$fg$	$f'g + fg'$
$f^2$	$2f'f$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$

## 5 Exemples de dérivation nécessitant l'utilisation de plusieurs formes :

La première chose à faire avant de dériver une fonction est de déterminer sa structure (somme, produit, quotient ...) afin de déterminer quelles sont les formes à utiliser.

### Exemples :

- 1) Dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x - 5$  :

La fonction se présente d'abord comme une somme de termes, on utilise donc la forme  $f + g$  (de dérivée  $f' + g'$ ) et pour dériver  $2x^3$  et  $5x^2$  on utilise la forme  $kf$ . Ce qui donne :

$$f'(x) = 2 \times \underbrace{(3x^2)}_{\text{dérivée de } x^3} + 5 \times \underbrace{(2x)}_{\text{dérivée de } x^2} + \underbrace{(7)}_{\text{dérivée de } 7x-5} = 6x^2 + 10x + 7$$

- 2) Dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = (8x^2 + 5)\sqrt{x}$  :

La fonction se présente sous la forme d'un produit, on utilise donc la forme  $fg$  (de dérivée  $f'g + fg'$ ). La dérivée de  $8x^2$  (forme  $kf$ ) est égale à  $8 \times (\text{dérivée de } x^2) = 8 \times (2x) = 16x$ . La dérivée de 5 est elle égale à 0. Donc la dérivée de  $8x^2 + 5$  est égale à  $16x$ .

D'où le résultat final :

$$f'(x) = \underbrace{16x}_{\text{dérivée de } 8x^2+5} \times \sqrt{x} + (8x^2 + 5) \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{dérivée de } \sqrt{x}} = 16x\sqrt{x} + \frac{8x^2 + 5}{2\sqrt{x}}$$

3) Dérivée de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{4-7x^2}$  :

La fonction se présente sous la forme d'un inverse, on va donc utiliser la forme  $\frac{1}{f}$  (de dérivée  $-\frac{f'}{f^2}$ ). On aura donc besoin de la dérivée de  $4-7x^2$  :

La dérivée de  $-7x^2$  (forme  $kf$ ) est égale à  $-7 \times (\text{dérivée de } x^2) = -7 \times (2x) = -14x$ . La dérivée de 4 étant nulle, la dérivée de  $4-7x^2$  sera donc égale à  $-14x$ .

D'où le résultat final :

$$f'(x) = -\frac{\overbrace{(-14x)}^{\text{dérivée de } 4-7x^2}}{(4-7x^2)^2} = \frac{14x}{(4-7x^2)^2}$$

## 6 Calcul d'une équation de la tangente à une courbe en un point :

### PROPRIÉTÉ

Si  $f$  est une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$  contenant le réel  $a$ , alors la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $a$  est la droite passant par le point  $A(a, f(a))$  et dont le coefficient directeur est égal à  $f'(a)$ .

Une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $a$  est alors :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

### Exemples :

1) Soit  $T$  la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 - 3x + 1$  au point d'abscisse 2 .

Une équation de  $T$  est :  $y = f(2) + f'(2)(x - 2)$

- on calcule d'abord  $f(2)$  :  $f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 4 - 6 + 1 = -1$ .

- on dérive  $f$  :  $f'(x) = 2x - 3$ .

- on en déduit la valeur de  $f'(2)$  :  $f'(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$ .

Une équation de  $T$  est donc :  $y = -1 + 1 \times (x - 2) \Leftrightarrow y = x - 3$

2) Soit  $T$  la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$  au point d'abscisse  $-1$  .

Une équation de  $T$  est :  $y = f(-1) + f'(-1)(x - (-1)) \Leftrightarrow y = f(-1) + f'(-1)(x + 1)$

- on calcule d'abord  $f(-1)$  :  $f(-1) = \frac{2(-1)-1}{-1+3} = -\frac{3}{2}$ .

- on dérive  $f$  :  $f'(x) = \frac{2 \times (x+3) - (2x-1) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x+1}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2}$ .

- on en déduit la valeur de  $f'(-1)$  :  $f'(-1) = \frac{7}{(-1+3)^2} = \frac{7}{4}$ .

Une équation de  $T$  est donc :  $y = -\frac{3}{2} + \frac{7}{4}(x+1) \Leftrightarrow y = -\frac{6}{4} + \frac{7}{4}x + \frac{7}{4} \Leftrightarrow y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}$