

# Primitives et intégration : L'essentiel du cours

## 1) Primitives d'une fonction sur un intervalle

- $F$  est une primitive de  $f$  sur un intervalle  $I$  si  $F$  est dérivable sur  $I$  et si pour tout  $x$  de  $I$ ,  $F'(x) = f(x)$ .
- Si  $F_0$  est une primitive de  $f$  sur intervalle  $I$  alors toutes les primitives de  $f$  sur  $I$  sont de la forme  $F(x) = F_0(x) + C$  où  $C$  est une constante réelle.
- Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  admet des primitives sur  $I$ .

• **Primitives des fonctions usuelles :** ( $F$  représente une primitive de  $f$ )

$f(x) = a$	$F(x) = ax$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{x^3}{3}$
$f(x) = x^3$	$F(x) = \frac{x^4}{4}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x^3}$	$F(x) = -\frac{1}{2x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = e^{ax+b}$	$F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$

• **Formules générales :**

forme de $f$	une primitive de $f$	exemples
$U'U$	$\frac{U^2}{2}$	$f(x) = \frac{1}{x} \times \ln x \Rightarrow F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$
$\frac{U'}{U}$ ( $U(x) > 0$ )	$\ln U$	$f(x) = \frac{3}{(3x+1)} \Rightarrow F(x) = \ln(3x+1)$
$U' e^U$	$e^U$	$f(x) = 2x e^{(x^2)} \Rightarrow F(x) = e^{(x^2)}$

• **Recherche pratique d'une primitive :**

Pour les fonctions usuelles, on utilise directement les formules.

Pour autres fonctions, il faut d'abord identifier la forme qui ressemble le plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on utilise directement la formule correspondante.

Dans le cas contraire, on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction  $f$  et on rectifie en multipliant par le coefficient adéquat.

► *Exemple :* Soit  $f$  définie sur  $] -2; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{(3x+6)}$ .

On pense à la forme  $\frac{U'}{U}$  (dont une primitive est  $\ln U$ ). On écrit que  $f(x) = \frac{1}{3} \times$

$$\underbrace{\frac{3}{3x+6}}_{\text{forme exacte}}$$

Une primitive de  $f$  sur  $] -2; +\infty[$  est donc  $F$  définie par  $F(x) = \frac{1}{3} \times \ln(3x+6)$ .

## 2) Intégration

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  :

• Pour tous  $a$  et  $b$  de  $I$  :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \text{ où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I.$$

► *Exemple :*

$$\int_0^{\ln 2} 3e^{3x} dx = [e^{3x}]_0^{\ln 2} = e^{3 \ln 2} - e^0 = e^{\ln(2^3)} - 1 = e^{\ln(8)} - 1 = 8 - 1 = 7.$$

**Propriétés de l'intégrale :**

Pour  $f$  et  $g$  continues sur un intervalle  $I$  et pour  $a$ ,  $b$  et  $c$  de  $I$  :

•  $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$

•  $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$  (*Relation de Chasles*)

•  $\int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$  (*linéarité de l'intégrale*)

• Pour tout réel  $k$ ,  $\int_a^b (kf)(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$  (*linéarité de l'intégrale*)

- Si  $a \leq b$  et si  $f(x) \geq 0$  sur  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
- Si  $a \leq b$  et si  $f(x) \leq 0$  sur  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f(x) dx \leq 0$
- Si  $a \leq b$  et si  $f(x) \leq g(x)$  sur  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

### Calculs d'aires

$f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $[a, b]$ .

- Si pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$  alors l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes de  $f$  et  $g$  et les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$  est égale à

$\int_a^b g(x) - f(x) dx$  en **unités d'aire**.

(« intégrale de la plus grande moins la plus petite » )

- Si pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \geq 0$  alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$

est égale à  $\int_a^b f(x) dx$  en **unités d'aire**.

- Si pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) \leq 0$  alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de  $f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$

est égale à  $-\int_a^b f(x) dx$  en **unités d'aire**.

#### ► Remarques :

- Pour avoir l'aire en  $\text{cm}^2$ , il faut multiplier le résultat en unités d'aire par : (la valeur en cm d'une unité sur l'axe des abscisses)  $\times$  (la valeur en cm d'une unité sur l'axe des ordonnées).
- Pour déterminer l'aire entre deux courbes, il faut d'abord connaître leur position relative sur l'intervalle en question afin de savoir quelle est « la plus grande » et « la plus petite ».

### Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$  est égale à

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$