Lois de probabilités discrètes - L'essentiel du cours

1) Loi uniforme discrète

DÉFINITION

Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme discrète sur $\{1; 2; \ldots; n\}$ signifie que X prend ses valeurs de façon **équiprobable** dans $\{1; 2; \ldots; n\}$.

► *Exemple :* Si on lance un dé à 6 faces non truqué et si on note X le numéro de la face obtenue, X suit la loi uniforme discrète sur $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

PROPRIÉTÉ

Si X suit la loi uniforme discrète sur $\{1; 2; \ldots; n\}$ alors $p(X = k) = \dfrac{1}{n}$ pour tout entier k compris entre 1 et n.

2) Rappels sur les probabilités conditionnelles

DÉFINITION

Étant donné deux événements A et B ($B \neq \varnothing$) d'un univers Ω, on appelle probabilité de B sachant A, le réel noté $p_A(B)$ tel que $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

PROPRIÉTÉS

Pour tous événements non vides A et B :

- $0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1$; $\quad p_A\left(\overline{B}\right) = 1 - p_A(B)$
- Dans le cas de l'équiprobabilité, $p_A(B) = \dfrac{\text{nb de cas favorables pour A} \cap \text{B}}{\text{nb de cas favorables pour A}}$
- $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$

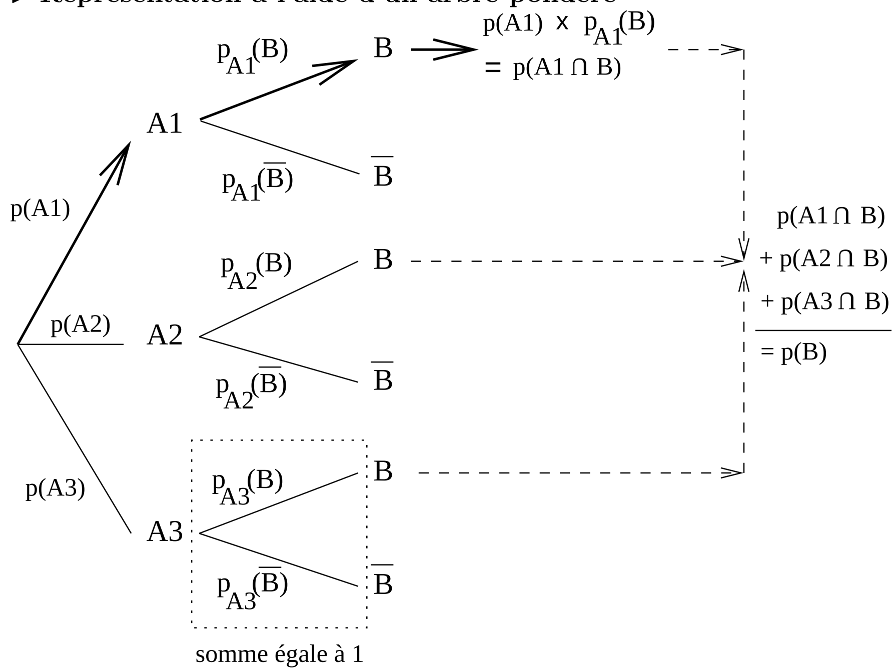
PROPRIÉTÉ

Formule des probabilités totales

Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont des événements non vides deux à deux incompatibles et dont l'union est égale à Ω (on dit alors qu'ils forment une partition de l'univers) alors pour tout événement B :

$p(B) = p(A_1 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + \cdots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$

► **Représentation à l'aide d'un arbre pondéré**



► **Règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés :**

- Sur les premières branches, on inscrit les $p(A_i)$.
- Sur les branches du type $A_i \longrightarrow B$, on inscrit $p_{A_i}(B)$.
- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.

DÉFINITION

- Deux événements A et B sont dits indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
- Ce qui revient à dire que $p_A(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$

3) Loi binomiale

DÉFINITION

• On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre).
• On appelle **schéma de Bernoulli** toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

► *Exemple :* Lancer un dé avec pour issues contraires « obtenir un 6 » et « ne pas obtenir un 6 » est une *épreuve* de Bernoulli. Lancer notre dé 10 fois est un *schéma* de Bernoulli (on répète l'épreuve de Bernoulli) .
Par contre, si on s'intéresse ensemble aux six événements « obtenir le chiffre n » ($1 \leqslant n \leqslant 6$), ce n'est plus une épreuve de Bernoulli.

► **Remarques :**

• Les deux issues contraires d'une *épreuve* de Bernoulli se note en général S (pour « succès ») et $\overline{S}$. La probabilité que S soit réalisé est noté en général p (la probabilité de $\overline{S}$ est alors $(1-p)$).

PROPRIÉTÉS

Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p et le schéma de Bernoulli consistant à répéter n fois de manière indépendante cette épreuve. Si note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S, la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p et est notée $\mathcal{B}(n,p)$.

• **Probabilité de n'obtenir que des succès** : $p(X=n)=p^n$

• **Probabilité de n'obtenir aucun succès** : $p(X=0)=(1-p)^n$

• **Probabilité d'obtenir k succès** : $p(X=k)=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k\ (1-p)^{n-k}$

(k entier tel que : $0 \leqslant k \leqslant n$)

• **Probabilité d'obtenir au moins un succès**=1-(probabilité de n'obtenir aucun succès)

• **Espérance de** X : $E(X)=np$

• **Variance de** X : $V(X)=np(1-p)$

• **Écart-type de** X : $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

Obtention du coefficient binomial $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ à la calculatrice :

CASIO : n `OPTN` `PROB` `nCr` k ; TI : n `MATH` `PROB` `3:Combinaison` k

► *Exemple :*
Si on lance 7 fois de suite un dé et si on note X le nombre de 6 obtenus, on répète 7 fois l'épreuve de Bernoulli : « obtenir un 6 (probabilité : $\frac{1}{6}$) - ne pas obtenir un 6 ».

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n=7$ et $p=\frac{1}{6}$.

La probabilité d'obtenir exactement trois fois un « 6 » est égale à : $\binom{7}{3}\ \left(\frac{1}{6}\right)^3\ \left(\frac{5}{6}\right)^4$
.

La probabilité de n'obtenir que des « 6 » est égale à : $\left(\frac{1}{6}\right)^7$

La probabilité de n'obtenir aucun « 6 » est égale à : $\left(\frac{5}{6}\right)^7$

L'espérance de X (nombre moyen de « 6 » que l'on peut espérer obtenir en répétant un grand nombre de fois l'expérience aléatoire) est égale à $np=\frac{7}{6}$.

4) Loi géométrique

DÉFINITION

Si on répète de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du « succès » est p et si on note X le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès, on dit que X suit la loi géométrique de paramètre p.

► *Exemple :* Si on lance un dé à 6 faces jusqu'à ce que le « 6 » apparaisse pour la première fois et si on note x le nombre de lancers nécessaires pour cela, X suit la loi géométrique de paramètre $p=\frac{1}{6}$.

PROPRIÉTÉS

Si X suit la loi géométrique de paramètre p alors :
• $p\,(X=k)=p\,(1-p)^{k-1}$ *(probabilité qu'il faille k répétitions pour obtenir le premier succès)*
• $p\,(X>k)=(1-p)^k$ *(probabilité qu'il faille plus de k répétitions pour obtenir le premier succès)*
• La probabilité d'attendre plus de k répétitions pour obtenir un premier succès est la même qu'on parte de la 1re épreuve ou de n'importe quelle autre. *(loi sans mémoire)*
• L'espérance de X est égale à $\frac{1}{p}$ *(nombre moyen de répétitions nécessaires pour obtenir le premier succès)*