Complément sur la fonction exponentielle et introduction au logarithme - L'essentiel du cours

Fonction exponentielle

a) Existence

e^x existe pour tout réel x.

b) Valeurs particulières

$e^0 = 1$; $e^1 = e$; $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

c) Propriétés algébriques

Pour tous réels a et b :
$e^a \times e^b = e^{a+b}$; $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$; $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

Pour tout entier n, $(e^a)^n = e^{na}$

► *Exemple :* Pour tout x, $(e^{-x})^2 \times e^{3x} = e^{-2x} \times e^{3x} = e^x$

d) Signe de e^x

Pour tout réel x, e^x est strictement positif.

e) Limites

En $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
En $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

f) Dérivées

$(e^x)' = e^x$; $(e^u)' = u'e^u$

► *Exemple :* $\left[e^{-0,5x}\right]' = -0,5\,e^{-0,5x}$

g) Lien entre $\ln x$ et e^x

- $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b$
- $\ln(e^x) = x$; $e^{\ln x} = x$ (pour $x > 0$)

► *Exemples :*

$e^{\ln 6} = 6$

$e^{-\ln 4} = \dfrac{1}{e^{\ln 4}} = \dfrac{1}{4}$

$e^{3\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^3 = 2^3 = 8$

$e^{\ln 2 + \ln 5} = e^{\ln 2} \times e^{\ln 5} = 2 \times 5 = 10$

$e^{\ln 6 - \ln 3} = \dfrac{e^{\ln 6}}{e^{\ln 3}} = \dfrac{6}{3} = 2$

► **Remarque :**
valeurs remarquables du logarithme : $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$

h) Équations et inéquations

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$; $e^a \leqslant e^b \Leftrightarrow a \leqslant b$
- Si $b > 0$:

$e^x = b \Leftrightarrow x = \ln b$
$e^x < b \Leftrightarrow x < \ln b$; $e^x \leqslant b \Leftrightarrow x \leqslant \ln b$
$e^x > b \Leftrightarrow x > \ln b$; $e^x \geqslant b \Leftrightarrow x \geqslant \ln b$

► *Exemple :* $4e^{-x} - 8 = 0 \Leftrightarrow 4e^{-x} = 8 \Leftrightarrow e^{-x} = 2 \Leftrightarrow -x = \ln 2 \Leftrightarrow x = -\ln 2$.
$S = \{-\ln 2\}$