Équations différentielles : L'essentiel du cours

a) Équations différentielles de la forme $y' + ay = 0$

> Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ ($a \neq 0$) sont les fonctions f de la forme $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax}$.

▶ *Exemples :*

• Résolution de l'équation différentielle $y' + 3y = 0$:
On a bien la forme $y' + ay = 0$ avec $a = 3$.
Les solutions sont définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} = k\,\mathrm{e}^{-3x}$.

• Résolution de l'équation différentielle $2y' - 3y = 0$:
$2y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' - \dfrac{3}{2}y = 0$ (en divisant toute l'équation par 2)
On a bien maintenant la forme $y' + ay = 0$ avec $a = -\dfrac{3}{2}$.
Les solutions sont définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} = k\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}$.

• Détermination de **la** solution de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$ telle que $f(0) = 4$:

- On commence par déterminer la forme de **toutes** les solutions :
  On a bien la forme $y' + ay = 0$ avec $a = 5$.
  Les solutions sont définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} = k\,\mathrm{e}^{-5x}$.
- On cherche maintenant la seule solution vérifiant la condition donnée $f(0) = 4$:
  On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-5x}$, donc on doit avoir $f(0) = k\,\mathrm{e}^{0} = k$.
  Pour avoir $f(0) = 4$, il faut donc prendre $k = 4$.
  La solution cherchée est donc définie par $f(x) = 4\,\mathrm{e}^{-5x}$

b) Équations différentielles de la forme $y' + ay = b$

> Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) sont les fonctions f de la forme $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a}$.

▶ *Exemples :*

• Résolution de l'équation différentielle $y' + 4y = 8$:
On a bien la forme $y' + ay = b$ avec $a = 4$ et $b = 8$.
Les solutions sont définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a} = k\,\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{8}{4} = k\,\mathrm{e}^{-4x} + 2$.

• Résolution de l'équation différentielle $2y' - 4y + 5 = 0$:
$2y' - 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow y' - 2y + \dfrac{5}{2} = 0$ (en divisant toute l'équation par 2) $\Leftrightarrow$ $y' - 2y = -\dfrac{5}{2}$ (en faisant passer le $\dfrac{5}{2}$ dans le second membre).
On a bien maintenant la forme $y' + ay = b$ avec $a = -2$ et $b = -\dfrac{5}{2}$.
Les solutions sont définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a} = k\,\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{-\frac{5}{2}}{-2} = k\,\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{5}{4}$.

• Détermination de **la** solution de l'équation différentielle $y' + y = 7$ telle que $f(0) = 1$:

- On commence par déterminer la forme de **toutes** les solutions :
  On a bien la forme $y' + ay = b$ avec $a = 1$ et $b = 7$.
  Les solutions sont définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a} = k\,\mathrm{e}^{-x} + 7$.
- On cherche maintenant la seule solution vérifiant la condition donnée $f(0) = 1$:
  On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-x} + 7$, donc on doit avoir $f(0) = k\,\mathrm{e}^{0} + 7 = k + 7$.
  Pour avoir $f(0) = 1$, il faut donc $k + 7 = 1 \Leftrightarrow k = -6$.
  La solution cherchée est donc définie par $f(x) = -6\,\mathrm{e}^{-x} + 7$