Dérivation, continuité et convexité - L'essentiel du cours

1) Dérivation

• Dérivées des fonctions usuelles :

$f(x)=b \Rightarrow f'(x)=0$	$f(x)=ax+b \Rightarrow f'(x)=a$
$f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$	$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$
$f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3x^2$	$f(x)=\dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$	$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

• Opérations sur les fonctions dérivables :

Fonction	Fonction dérivée
$u+v$	$u'+v'$
$k\,u \quad (k$ réel$)$	$k\,u'$
$u\,v$	$u'\,v+u\,v'$

Fonction	Fonction dérivée
u^2	$2\,u'\,u$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'\,v-u\,v'}{v^2}$

Si $g(x)=f(ax+b)$ alors $g'(x)=af'(ax+b)$

2) Variations des fonctions dérivables

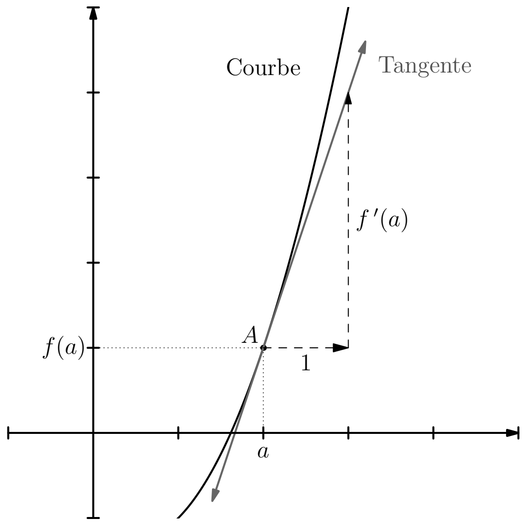
▶ **Principe général** : le signe de la dérivée donne le sens de variation d'une fonction et inversement. En particulier ;

• Si la dérivée reste strictement positive sur un intervalle (sauf en un nombre fini de points isolés où elle peut s'annuler) alors on peut affirmer que la fonction est strictement croissante sur cet intervalle ;
• Si la dérivée reste strictement négative sur un intervalle (sauf en un nombre fini de points isolés où elle peut s'annuler) alors on peut affirmer que la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle.

3) Tangente

• Si f est dérivable en a alors une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est : $y=f(a)+f'(a)(x-a)$
(le coefficient directeur de la tangente est égale à la valeur de la dérivée)
• Pour déterminer les abscisses des éventuels points de C_f où la tangente admet un coefficient directeur égal à m, il suffit de résoudre l'équation $f'(x)=m$.

• Construction de la tangente au point A d'abscisse a :



• Détermination graphique de $f'(a)$ à partir de la tangente au point A d'abscisse a :
Si B est un autre point de la tangente, on a $f'(a)=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

4) Continuité

• f est continue en un point a d'un intervalle I où est définie la fonction si f admet une limite en a et si $\lim\limits_{x\to a}=f(a)$.
• f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point a de I. La courbe de f peut alors se tracer d'un trait continu.
• Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

5) Théorème de la valeur intermédiaire - Équation $f(x) = k$

• Si f est **continue** et **strictement croissante** ou **strictement décroissante** sur un intervalle I et si k est compris entre les valeurs de f aux bornes de I alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution x_0 dans I.
• Pour déterminer une valeur approchée de x_0, on utilise la méthode du « balayage »(en utilisant la calculatrice).

► *Exemple :* la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x$ est continue et strictement croissante sur $I = [1, 2]$ car f est dérivable et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ sur I.
De plus 5 est compris entre $f(1) = 2$ et $f(2) = 10$. On peut donc en conclure que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution x_0 dans $[1, 2]$.
Recherche une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près :

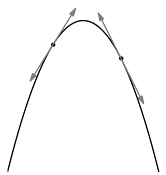
x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	**1,5**	**1,6**	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$	2	2,43	2,93	3,50	4,14	**4,87**	**5,70**				

Inutile de regarder après $1,6$ car $f(1,5) < 5 < f(1,6)$. On peut donc en déduire que : $1,5 < x_0 < 1,6$. Une valeur approchée de x_0 **par défaut** à 10^{-1} près est $1,5$ et une valeur approchée de x_0 **par excès** à 10^{-1} près est $1,6$.

6) Convexité

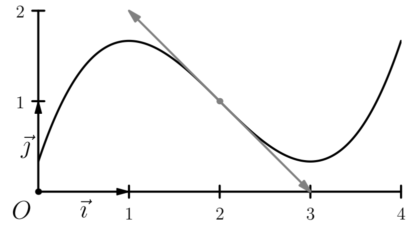
Étant donné une fonction f dérivable sur un intervalle I.
• f est dite **convexe** sur I si sa courbe représentative est entièrement située au dessus de chacune de ses tangentes.

• f est dite **concave** sur I si sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



PROPRIÉTÉ

Étant donné une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle $]a; b[$.
• Si, pour tout x de $]a; b[$, $f''(x) \geqslant 0$ alors f est convexe sur $]a; b[$.
• Si, pour tout x de $]a; b[$, $f''(x) \leqslant 0$ alors f est concave sur $]a; b[$.
• Si $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en un point x_0 de $]a; b[$ alors la courbe de f admet un point d'inflexion en x_0 (la courbe traverse la tangente en ce point).



► *Exemple :* Soit f définie par $f(x) = x^3$.
Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.
f est convexe sur $]0\,; +\infty[$ car $f''(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
f est concave sur $]-\infty\,; 0[$ car $f''(x) < 0$ pour tout $x < 0$.
f admet un point d'inflexion en 0 car f'' s'annule pour $x = 0$ en changeant de signe.

7) Rappels sur les études de signe

Signe de $ax + b$ $(a \neq 0)$

On détermine la valeur de x qui annule $ax + b$, puis on applique la règle : « signe de a après le 0 ».

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$ax + b$		signe de $(-a)$	0	signe de a	

Signe de $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

On calcule la discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ (sauf cas évidents)

• Si $\Delta < 0$, on applique la règle : « toujours du signe de a ».

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a	

• Si $\Delta = 0$, on calcule la racine double : $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$.

On applique alors la règle : « toujours du signe de a et s'annule pour $x = x_1$ ».

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

• Si $\Delta > 0$, on calcule les deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

On applique alors la règle : « signe de a à l'extérieur des racines ».

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

(en supposant que $x_1 < x_2$)