Complément sur les suites

► Exercice n°1
Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1{,}7)^n$
b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(0{,}85)^n$
c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\times(0{,}6)^n$
d) $\lim\limits_{n\to+\infty} -4\times(1{,}7)^n$
e) $\lim\limits_{n\to+\infty} 5+5\times(1{,}8)^n$
f) $\lim\limits_{n\to+\infty} 10-2\times(0{,}75)^n$
g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-2n}$
h) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n+n^2$

► Exercice n°2
On place un capital $U_0 = 8000$ euros à 3 % par an avec **intérêts simples** (autrement dit, chaque année, on reçoit les mêmes intérêts égaux à 3 % du capital **initial**).
On note U_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Quel est le montant des intérêts que rapporte ce placement chaque année ?
2. Donner la nature et la raison de la suite (U_n).
3. Exprimer U_n en fonction de n.
4. Calculer la valeur du capital au bout de 15 ans.

► Exercice n°3
On place un capital $U_0 = 8000$ euros à 3 % par an avec **intérêts composés** (autrement dit, chaque année, on reçoit des intérêts égaux à 3 % du capital de **l'année précédente**).
On note U_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Comment passe-t-on de la valeur du capital d'une année à celle de l'année suivante ?
2. Donner la nature et la raison de la suite (U_n).
3. Exprimer U_n en fonction de n.
4. Calculer la valeur du capital au bout de 8 ans.
5. Au bout de combien d'années la valeur du capital aura-t-elle doublé ?

► Exercice n°4
Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison $q = 3$.

1. Calculer U_2 et U_5.
2. Exprimer U_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (U_n) .
4. Calculer $U_0 + U_1 + \cdots + U_8$

► Exercice n°5
On dispose d'un échantillon d'os fossiles contenant initialement $M_0 = 10$ grammes de carbone 14. On considère que la masse de carbone 14 dans un tel échantillon diminue à raison de 1,2% par siècle et on note M_n la masse en grammes de carbone 14 contenue dans l'échantillon au bout de n siècles.

1. Justifier que (M_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Exprimer M_n en fonction de n.
3. Déterminer au bout de combien de siècles, la masse de carbone 14 contenue dans l'échantillon sera inférieure à 5 grammes.

► Exercice n°6
La période de désintégration d'un élément radioactif est le temps au bout duquel la masse d'un échantillon est divisée par 2 (cette période est constante).
On note U_0 la masse initiale de l'élément radioactif et U_n sa masse au bout de n périodes de désintégration.

1. Justifier que la suite (U_n) est géométrique et donner sa raison.
2. La période de désintégration du radium est de 1500 ans et on considère un échantillon de 5 g de radium.
   On note $U_0 = 5$ et U_n la masse de l'échantillon au bout de n périodes de désintégration.
   a) Exprimer U_n en fonction de n.
   b) Calculer ce que sera la masse de l'échantillon dans 10500 ans.
   c) Au bout de combien d'années la masse de l'échantillon sera-t-elle inférieure à 5 milligramme ?

► Exercice n°7
Une plaque de verre teintée est telle qu'un rayon lumineux qui la traverse perd 20 % de son intensité lumineuse et on fait traverser à un rayon lumineux d'intensité 50 cd une série de ces plaques de verre teintée.
On note $I_0 = 50$ et I_n l'intensité du rayon lumineux après le passage de n plaques.

1. Justifier que la suite (I_n) est géométrique et donner sa raison.
2. Exprimer I_n en fonction de n.
3. Calculer l'intensité du rayon lumineux après le passage de 4 plaques.
4. On cherche à déterminer le plus petit nombre de plaques que le rayon lumineux doit franchir pour que son intensité devienne inférieure à 1 cd.

a) **Méthode 1 : avec un script python**.
Compléter la 3e ligne du script ci-dessous pour qu'il réponde à la question.

```
n=0
I=50
while ...... :
  I=0.8*I
  n=n+1
print(n)
```

b) **Méthode 2 : en résolvant une inéquation**.
Déterminer, par le calcul, le plus entier n tel que $I_n \leqslant 1$.

▶ Exercice n°8

On tire n fois avec remise une carte dans un jeu de 32 cartes et on note X le nombre d'as obtenus.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. On note p_n la probabilité de n'obtenir aucun as lors de ce tirage de n cartes.
   a) Exprimer p_n en fonction de n.
   b) Quelle est la nature de la suite (p_n) ?
   c) Déterminer le sens de variation et la limite de la suite (p_n).
3. On note q_n la probabilité d'obtenir au moins un as lors de ce tirage de n cartes.
   a) Exprimer q_n en fonction de n.
   b) Déterminer la limite de la suite (q_n).
   c) Déterminer le nombre minimum n de cartes qu'il faut tirer afin que la probabilité d'obtenir au moins un as soit supérieure à 0,99.

▶ Exercice n°9

Dans la feuille de calcul ci-dessous, on cherche à déterminer dans la colonne B les premiers termes de la suite (U_n) définie par $U_0 = 10$ et $U_{n+1} = 2U_n - 5$.

	A	B
1	n	Un
2	0	
3	1	
4	2	
5	3	

1. Quelle valeur faut-il entrer dans la cellule B2 ?
2. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule B3 pour qu'en la recopiant ensuite vers le bas on obtienne automatiquement les premiers termes de la suite (U_n) ?

▶ Exercice n°10

Le script python ci-dessous permet de calculer le terme de rang n d'une suite (U_n) définie de façon récurrente.

```
U=25
n=int(input("n? "))
for i in range(1,n+1):
  U=0.9*U+2
print(U)
```

1. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et donner la valeur de U_0.
2. Calculer U_1 et U_2.
3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 20$.
   a) Calculer V_0, V_1 et V_2.
   b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
   c) En déduire V_n, puis U_n en fonction de n.
4. Calculer U_{10}.
5. Déterminer la limite de la suite (U_n).
6. Calculer $V_0 + V_1 + \cdots + V_9$. En déduire $U_0 + U_1 + \cdots + U_9$

▶ Exercice n°11

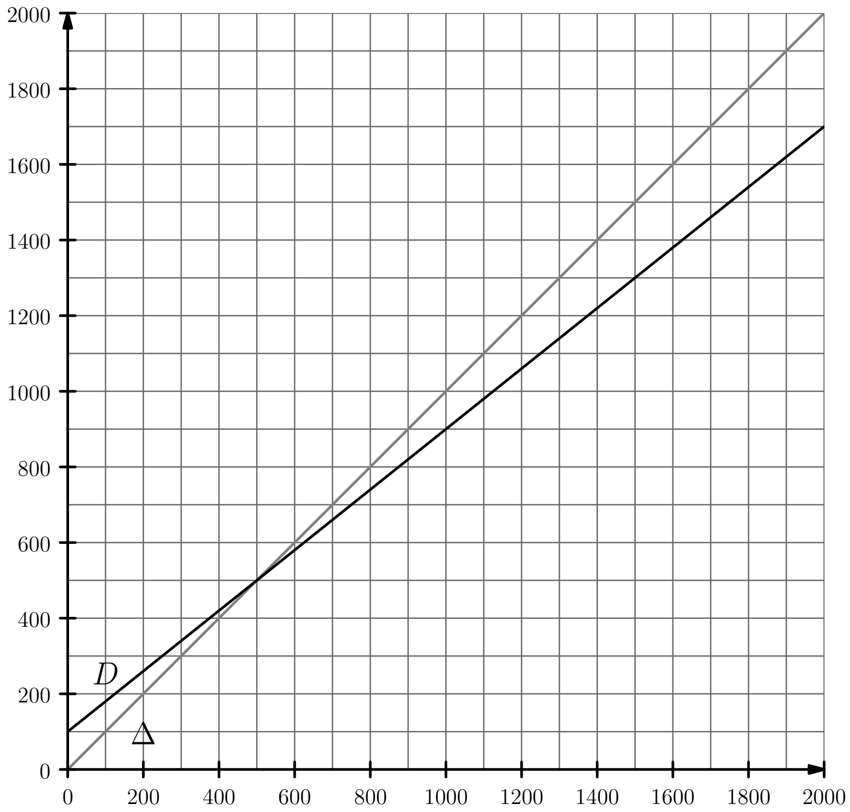
Après son installation, un lundi matin, un aquarium contient 280 litres d'eau et des poissons.
Par évaporation, le volume d'eau dans l'aquarium diminue de 2 % par semaine et pour compenser cette évaporation, on ajoute chaque lundi matin, en une seule fois, 5 litres d'eau .
On note $U_0 = 280$, le volume initial d'eau en litres dans l'aquarium et ,pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note U_n le volume d'eau dans l'aquarium, en litres, n semaines après son installation, immédiatement après l'ajout hebdomadaire des 5 litres d'eau.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0{,}98U_n + 5$.
2. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 250$.
   a) Justifier que (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme V_0.
   b) En déduire V_n, puis U_n en fonction de n.
3. Compte tenu du nombre de poissons, cet aquarium doit contenir en permanence au minimum 240 litres d'eau. Justifier que cette préconisation est respectée.

▶ Exercice n°12

Le 1er janvier 2020, une entreprise compte $U_0 = 2000$ employés. À partir de l'année 2020, 20% de l'effectif partira à la retraite chaque année et l'entreprise embauchera 100 jeunes par an pour compenser ces départs. On note U_n le nombre d'employés de l'entreprise le 1er janvier de l'année $(2020 + n)$.

1. Expliquer pourquoi on a pour tout n, $U_{n+1} = 0{,}8 \times U_n + 100$.
2. Sur le graphique ci-dessous figurent la droite D d'équation $y = 0{,}8x + 100$ et la droite Δ d'équation $y = x$.



   Construire sur le graphique U_1, U_2, U_3 et U_4.
3. Déterminer le réel a tel que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - a$ soit une suite géométrique de raison 0,8.
4. Exprimer V_n, puis U_n en fonction de n.
5. Quel sera le nombre d'employés le 1er janvier 2025 ?
6. Calculer $U_{n+1} - U_n$ et montrer que, pour tout n, $U_{n+1} - U_n = -300 \times 0{,}8^n$.
7. En déduire le sens de variation de la suite (U_n).
8. Déterminer la limite de la suite (U_n).
9. Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'employés sera inférieur à 600.

▶ Exercice n°13

Dans une certaine région, l'accroissement de la population de lièvres diminue de moitié chaque année. On note $P_0 = 500\,000$ la population initiale, $P_1 = 700\,000$ la population au bout de un an et P_n la population au bout de n années.
On a donc, pour tout n, $P_{n+2} - P_{n+1} = 0{,}5\,(P_{n+1} - P_n)$.

1. Calculer P_2 et P_3.
2. On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par :
   $U_n = P_{n+1} - P_n$ et $V_n = P_{n+1} - 0{,}5P_n$.
   a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique et exprimer U_n en fonction de n.
   b) Montrer que (V_n) est une suite constante. En déduire la valeur de V_n, pour tout n.
   c) Montrer que $2\,(V_n - U_n) = P_n$ et exprimer P_n en fonction de n.
   d) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$.

▶ Exercice n°14

Un emprunteur contracte auprès d'une banque un prêt d'un montant de 120 000 euros au taux annuel de 1 %. On note :

- $U_0 = 120\,000$, le capital emprunté ;
- A, l'annuité que doit rembourser chaque année l'emprunteur (qui dépend de la durée de remboursement et que l'on va chercher à déterminer) ;
- U_n, le capital qui reste à rembourser au bout de n années.

Quand on emprunte au taux de 1 %, la banque considère qu'elle doit recevoir, en plus de l'annuité de remboursement, des intérêts annuels égaux à 1 % de la somme qui reste à rembourser. Ces intérêts s'ajoutent au capital que doit rembourser l'emprunteur.
On a ainsi, pour tout entier positif n, $U_{n+1} = U_n - A + \frac{1}{100}U_n$.
La suite (U_n) est donc définie par $U_0 = 120\,000$ et $U_{n+1} = 1{,}01U_n - A$.

1. Justifier que (V_n) définie par $V_n = U_n - 100A$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme V_0.
2. En déduire V_n, puis U_n en fonction de n et de A.
3. Déterminer A pour que le prêt soit remboursé en 15 ans, c'est à dire que $U_{15} = 0$.
   En déduire les mensualités que doit payer l'emprunteur à sa banque.