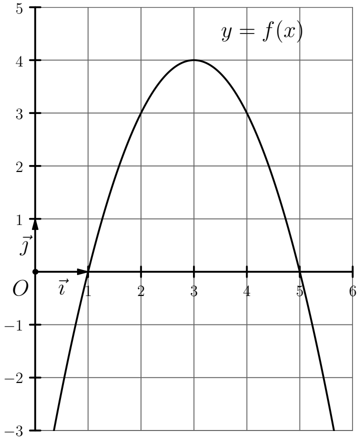
Primitives et intégration

▶ Exercice n°1

La courbe ci-dessous représente une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et on note F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.



Déterminer, en justifiant votre réponse, si les propositions ci-dessous sont vraies ou fausses :

- *Proposition 1 :* « $F'(3) = 0$ »
- *Proposition 2 :* « F est croissante sur $]1\,;5\,[$ »
- *Proposition 3 :* « La tangente à la courbe représentative de la primitive F au point d'abscisse 2 admet comme équation $y = 4x$ »
- *Proposition 4 :* « La primitive F est convexe sur $]1\,;5\,[$ »

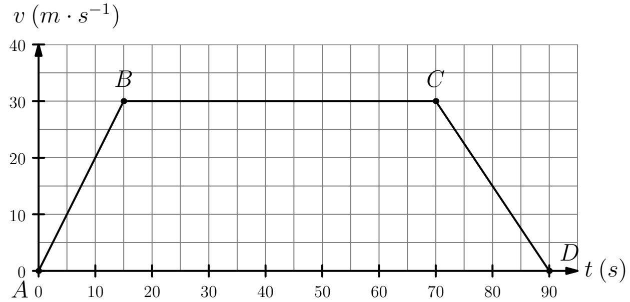
▶ Exercice n°2

Une entreprise fabrique x milliers d'objets avec $x \in [0\,;15\,]$.

1. Le coût marginal, en euros, de cette production est définie sur $[0\,;15\,]$ par $C_m(x) = 3x^2 - 36x + 750$.
   Étudier les variations de la fonction coût marginal sur $[0\,;15\,]$.
   En déduire la quantité d'objets à fabriquer pour avoir un coût marginal minimum.
2. Le coût marginal est assimilé à la dérivée du coût total noté $C_T(x)$.
   Déterminer $C_T(x)$ sachant que $C_T(0) = 200$. *(les coûts fixes s'élevant à 200 euros)*

▶ Exercice n°3

Le graphique ci-dessous représente l'évolution de la vitesse v (en mètres par seconde) d'une moto sur une route rectiligne en fonction du temps t (en secondes).



1. On note d la fonction qui donne la distance parcourue (en mètres) en fonction du temps t. On rappelle que la fonction vitesse v est la dérivée de la fonction distance d. Compléter la phrase suivante :
   Si $v(t) = d'(t)$ alors on peut dire que la fonction ...... est une primitive de la fonction ....
2. Mouvement entre 0 et 15 secondes :
   a) En déterminant une équation de la droite (AB), déterminer l'expression de $v(t)$ en fonction de t pour t compris entre 0 et 15 secondes.
   b) En déduire $d(t)$ pour t compris entre 0 et 15 secondes.
   c) Quelle est la distance parcourue au bout de 15 secondes ?
3. Mouvement entre 15 et 70 secondes :
   a) Quelle est l'expression de $v(t)$ entre 15 et 70 secondes ?
   En déduire $d(t)$ pour t compris entre 15 et 70 secondes.
   b) Quelle est la distance parcourue au bout de 70 secondes ?
4. Mouvement entre 70 et 90 secondes :
   a) En déterminant une équation de la droite (CD), déterminer l'expression de $v(t)$ en fonction de t pour t compris entre 70 et 90 secondes.
   b) En déduire $d(t)$ pour t compris entre 70 et 90 secondes.
   c) Quelle est la distance parcourue au bout des 90 secondes ?

Remarque :

- Entre 0 et 15 secondes, le mouvement est dit uniformément accéléré ;
- Entre 15 et 70 secondes, le mouvement est dit uniforme ;
- Entre 70 et 90 secondes, le mouvement est dit uniformément décéléré.

► **Exercice n°4**

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^3 \left(x^2+1\right)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^2 \left(3x+1+\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}(\ln x)\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_{-1}^0 3\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2x}\right)\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

► **Exercice n°5**

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x)=x\ln x$ est une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x)=1+\ln x$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

► **Exercice n°6**

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x)=(-2x-3)\,\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x)=(2x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

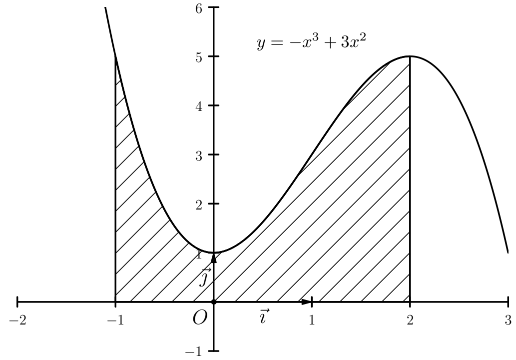
► **Exercice n°7**

La probabilité qu'une année donnée la hauteur maximale d'un fleuve soit inférieur à a mètres est égale à $P(a)=\displaystyle\int_0^a 0{,}4x\,\mathrm{e}^{-0{,}2x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $P(a)$ en fonction de a.
2. En déduire la valeur de a pour laquelle $P(a)=0{,}99$.

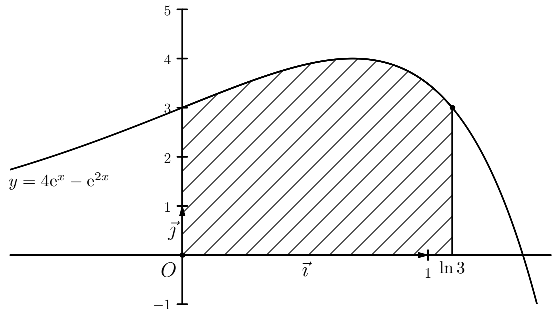
► **Exercice n°8**

Calculer, en unités d'aire, l'aire de la zone hachurée ci-dessous :



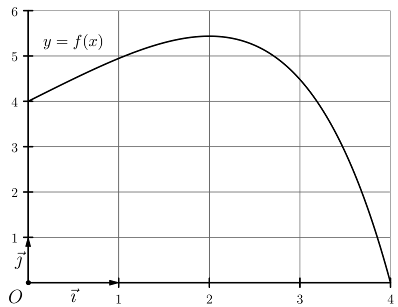
► **Exercice n°9**

Calculer, en unités d'aire, l'aire de la zone hachurée ci-dessous :



► **Exercice n°10**

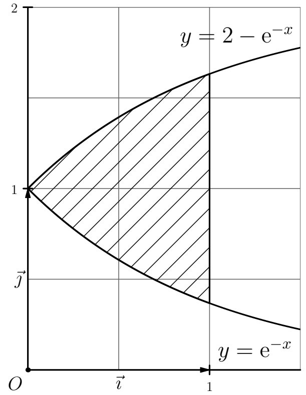
La courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0;4]$ est donnée ci-dessous :



Justifier, d'après le graphique, que $12\leqslant\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 18$.

▶ Exercice n°11

Calculer, en unités d'aire, l'aire de la zone hachurée ci-dessous :



▶ Exercice n°12

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$.

Dans un repère orthonormé d'unité 2 cm, on note C_f la courbe représentative de la fonction f et D la droite d'équation $y = x$.

1. Étudier la position relative de C_f et D sur $]0\,;+\infty[$.
2. Calculer l'aire A (en cm^2) du domaine délimité par la courbe C_f, la droite D et par les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

▶ Exercice n°13

Calculer la valeur moyenne sur $[1\,;4]$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{x}$.

▶ Exercice n°14

La vitesse (en mètres par seconde) d'un objet en mouvement est définie par $v(t) = 25\left(1 - \mathrm{e}^{-2t}\right)$ (t en secondes).

Calculer la vitesse moyenne de l'objet (la valeur moyenne de la fonction « vitesse ») entre $t = 1$ s et $t = 2$ s.

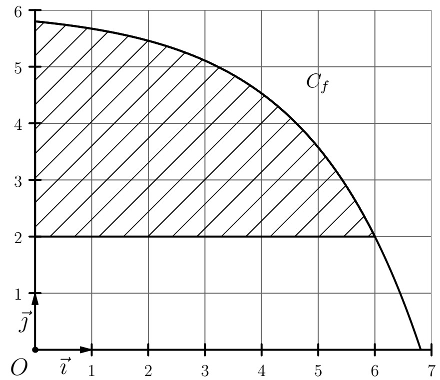
▶ Exercice n°15

Le cours d'une action en euros est modélisée par la fonction f définie sur $[1;13]$ par $f(t) = 20t + 40 - 80\ln t$ où t représente le nombre de mois écoulés depuis le 1er décembre 2019.

1. Étudier les variations de f sur $[1;13]$.
2. Justifier que la fonction F définie par $F(t) = 10t^2 + 120t - 80t\ln t$ est une primitive de f sur $[1;13]$.
3. Calculer la valeur moyenne de f sur $[1;13]$.

▶ Exercice n°16

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 6 - 4\mathrm{e}^{0.5x-3}$ et C_f sa courbe représentative dans le repère ci-dessous.



1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection entre C_f et l'axe des abscisses.
2. Justifier que $f(6) = 2$.
3. Montrer qu'il existe un point de C_f où la tangente admet un coefficient directeur égal à -2.
4. Justifier que f est concave sur $[0\,;+\infty[$.
5. Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie hachurée sur le graphique.

▶ Exercice n°17

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 20 - 20\,\mathrm{e}^{-0.1t}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

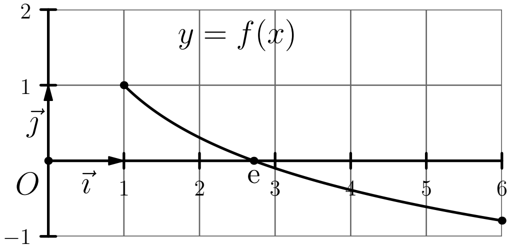
1. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   c) La courbe C_f admet-elle une asymptote horizontale ? Si oui, en donner une équation.
   d) Dériver f et justifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Un fil conducteur parcouru par un courant électrique d'intensité constante s'échauffe par effet Joule et sa température est donnée, en degrés Celsius, par $f(t)$ où t est le temps exprimé en secondes.
   a) Quelle est la température du fil au bout de 10 sec ? On donnera une valeur approchée du résultat à 0,1C près.

b) Déterminer, en résolvant une équation, au bout de combien de temps la température du fil sera de 19C. On donnera le résultat à une seconde près.

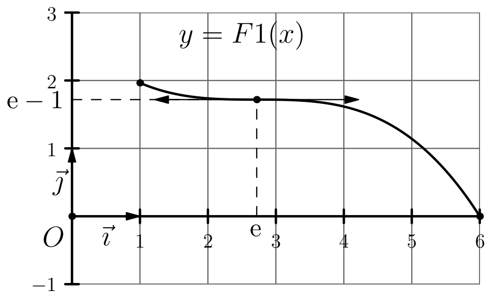
c) Déterminer une valeur approchée à 0,1C près de la température moyenne du fil pendant la première minute.

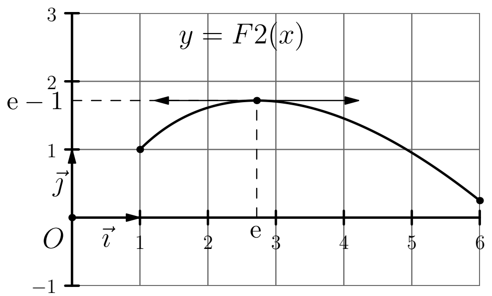
▶ Exercice n°18

La courbe d'une fonction f définie sur $[0\,;\,6]$ est donné ci-dessous :



1. Parmi les deux courbes ci-dessous, une seule représente une primitive de f sur $[0\,;\,6]$. Déterminer laquelle.





2. Déterminer la valeur de $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$. Que représente graphiquement I ?

▶ Exercice n°19

1. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1 - \mathrm{e}^{x-1} \geqslant 0$.

   b) Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par $g(x) = x\left(1 - \mathrm{e}^{x-1}\right)$. Justifier que $g(x) \geqslant 0$ pour tout x de $[0;1]$.

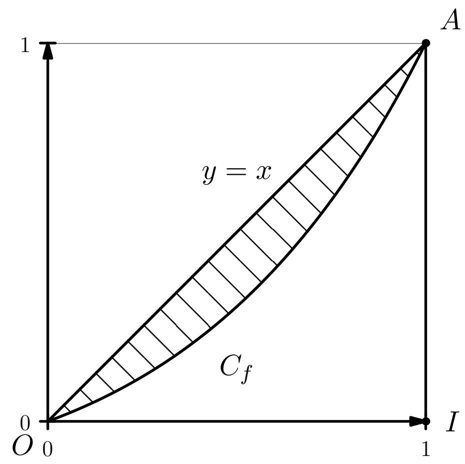
   c) Montrer que la fonction G définie par $G(x) = (1-x)\mathrm{e}^{x-1} + \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de g sur $[0;1]$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x-1}$.

   a) Vérifier que :
   - $f(0) = 0$;
   - $f(1) = 1$;
   - f est croissante sur $[0;1]$;
   - $f(x) \leqslant x$ pour tout x de $[0;1]$.
     (on utilisera le résultat de la question 1. b)

   Remarque : la courbe d'une fonction vérifiant ces conditions est appelée en économie une courbe de Lorenz.

   b) Dans le graphique ci-dessous figure la courbe de la fonction f et la droite d'équation $y = x$.



On appelle coefficient de Gini associé à la courbe de Lorenz définie par la fonction f le rapport $\dfrac{\text{aire de la partie hachurée}}{\text{aire du triangle } OIA}$.

En remarquant que l'aire de la partie hachurée est égale à $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$, calculer la valeur du coefficient de Gini associé à la courbe de Lorenz définie par la fonction f.