Fonction logarithme népérien

▶ Exercice n°1

Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$:

1. $\ln(8)$
2. $\ln(8)+\ln(32)$
3. $\ln(64)-\ln(8)$
4. $\ln(16)-3\ln(2)$

▶ Exercice n°2

Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln(3)$:
(e *est le nombre tel que* $\ln\mathrm{e}=1$*)*

1. $\ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$
2. $\ln(81)-2\ln(3)$
3. $\ln\left(\dfrac{3}{\mathrm{e}}\right)$
4. $\ln\left(9\mathrm{e}^2\right)$

▶ Exercice n°3

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x\ln x$
2. f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=(\ln x)^2$
3. f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$
4. f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4\ln x}{x^2}$

▶ Exercice n°4

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x+\ln x$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{\ln x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\ln x)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 3(\ln x)+x^2$
5. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x}-\ln x$

▶ Exercice n°5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln(x+1)=0$
2. $\ln(2-3x)=\ln 4$
3. $\ln(4x)=\ln(x-3)$
4. $\ln(x-1)+\ln(x-2)=\ln 6$
5. $\ln x=4$
6. $\ln(2x)=5$
7. $\ln(3x)=1$
8. $\ln(1+x)=-2$

▶ Exercice n°6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\ln(x+1)\leqslant 0$
2. $\ln x\geqslant 3$
3. $1-\ln x\geqslant 0$

▶ Exercice n°7

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x+\ln x$.
Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$ et étudier ses variations sur $]0;+\infty[$.

▶ Exercice n°8

Soit f la fonction définie sur $[0{,}5\,;+\infty[$ par $f(x)=x\,(\ln x-1)$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $[0{,}5\,;+\infty[$.
3. Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0{,}5\,;+\infty[$.

▶ Exercice n°9

Quand l'oreille d'un individu est soumise à une pression acoustique x, exprimée en bars, l'intensité sonore, exprimée en décibels, du bruit responsable de cette pression est donnée par :

$$f(x)=8{,}68\times\ln x+93{,}28$$

1. Calculer l'intensité sonore correspondante à une pression acoustique de 5 bars.

2. Justifier que f est une fonction strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Un individu normal ne peut supporter un bruit supérieur à 120 décibels.
   a) On cherche à connaitre le premier nombre entier x de bars pour lequel l'intensité $f(x)$ dépasse 120 décibels à l'aide d'un script python.
   Pour cela on part d'une pression $x = 1$ que l'on augmente de 1 tant que cela est nécessaire.
   Compléter la 3^e ligne du code python ci-dessous pour qu'il réponde au problème :

```
from math import*
x=1
while 8.68*log(x)+93.28 ...... :
  x=x+1
print(x)
```

   Remarque : avec python le logarithme népérien est donné par log()
   b) Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ l'équation $f(x) = 120$ et retrouver ce que devrait afficher le script python.

▶ Exercice n°10
La fonction B définie sur $[1\,;6]$ par $B(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln x$ représente le bénéfice mensuel (en dizaines de milliers d'euros) réalisé par une entreprise lors de la vente de x centaines d'objets produits par mois.
En étudiant les variations de B, déterminer la quantité d'objets à produire par mois pour obtenir un bénéfice mensuel maximal.

▶ Exercice n°11
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3 - 2x - \ln x$.
1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Dériver f et étudier ses variations sur $]0;+\infty[$.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
4. Étudier, par le calcul, la position relative de la courbe représentative de f et de la droite D d'équation $y = 3 - 2x$ sur $]0;+\infty[$.
5. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $[1\,;2]$. Déterminer une valeur approchée de x_0 à 0,1 près par défaut.
6. Justifier que f est convexe sur $]0;+\infty[$.

▶ Exercice n°12
Dériver la fonction f dans les cas suivants :
1. f est définie sur $]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(3x-6)$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+x^2)$
3. f est définie sur $]-\infty\,;2[$ par $f(x) = \ln(-2x+4)$
4. f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(3+\dfrac{1}{x}\right)$
5. f est définie sur $]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x}{x-2}\right)$

▶ Exercice n°13
Une étude portant sur le prix d'un type de cahiers aboutit à la modélisation suivante :
• f est la fonction définie sur $]0\,;1]$ par $f(x) = -4\ln x$;
• g est la fonction définie sur $]0\,;1]$ par $g(x) = 4\ln(6x+1)$;
• $f(x)$ et $g(x)$ représentent respectivement la quantité de cahiers demandée et offerte, exprimée en milliers, en fonction du prix unitaire x du cahier exprimé en euros.
1. Déterminer les limites des fonctions f et g en 0.
2. Étudier les variations des fonctions f et g sur $]0\,;1]$ et dresser leur tableau de variation.
3. En économie, le prix d'équilibre est la valeur de x pour laquelle $f(x) = g(x)$. Déterminer la valeur exacte de ce prix d'équilibre.

▶ Exercice n°14
Déterminer, dans chacun des cas suivants, le plus petit entier positif n vérifiant la relation donnée :
1. $3^n \geqslant 800$
2. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 0{,}01$
3. $(1{,}03)^n \geqslant 2$
4. $(0{,}95)^n \leqslant 0{,}2$

▶ Exercice n°15
Le pH d'une solution est défini par $\mathrm{pH} = -\log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ désigne la concentration en moles par litre d'ions H_3O^+ contenus dans la solution.
1. Une solution de 150 millilitres admet une concentration d'ions H_3O^+ de 10^{-2} moles par litre.
   a) Calculer le pH de cette solution.
   b) Combien de moles d'ions H_3O^+ contient cette solution ?

2. On ajoute à la solution 850 millilitres d'eau distillée.
   a) Quelle est la concentration en ions H_3O^+ dans la nouvelle solution obtenue ?
   b) En déduire le nouveau pH.

▶ Exercice n°16

L'échelle de Richter sert à mesurer la puissance d'un tremblement de terre. La magnitude d'un séisme sur cette échelle est donnée par $M = \log\left(\dfrac{A}{A_0}\right)$ où A représente l'amplitude maximale des ondes relevée par un sismographe et A_0 une amplitude référence.

1. Que vaut $\dfrac{A}{A_0}$ pour un séisme de magnitude égale à 5 ?
2. Si l'amplitude maximale des ondes A est multipliée par 100, de combien augmente la magnitude ?

▶ Exercice n°17

Pour mesurer la perte de puissance dans une fibre optique, on utilise le coefficient d'atténuation (exprimé en décibels par kilomètre) défini par $A = \dfrac{1}{L} \times 10 \times \log\left(\dfrac{P_e}{P_s}\right)$ où L est la longueur (en kilomètres) de la fibre optique, P_e est la puissance (en mW) du signal lumineux à l'entrée de la fibre et P_s est la puissance (en mW) du signal lumineux à la sortie de la fibre.

1. Un technicien effectue une mesure à la sortie d'une fibre de 5 km dont la puissance d'entrée est $P_e = 5$ mW. Il obtient une puissance de sortie égale à $P_s = 3{,}5$ mW. Calculer la valeur du coefficient d'atténuation correspondant.
2. Lorsque $P_s = \frac{1}{10} \times P_e$, on considère que la fibre optique doit-être remplacée. Quelle est alors la valeur de A pour une fibre de 10 km ?
3. Expliquer pourquoi le coefficient d'atténuation ne peut pas être négatif.