Complément sur la fonction exponentielle - Introduction au logarithme

▶ Exercice n°1
Compléter les égalités suivantes :

a) $e^{\cdots} \times e^5 = e^{-3}$ b) $e^{\cdots} \times e^{-4x} = e^{7x}$ c) $\dfrac{e^{\cdots}}{e^{-3}} = e^{-1}$ d) $\dfrac{e^{4x}}{e^{\cdots}} \times e^{-6x} = e^{5x}$

▶ Exercice n°2
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + e^x$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x - 3e^x$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{e^x}{x}$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - \dfrac{1}{x}$

▶ Exercice n°3
Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$
2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$
3. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - x^2)e^x$
4. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3 + e^x}$
5. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - e^x)^2$

▶ Exercice n°4
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. l'équation $e^{x+2} = 1$
2. l'équation $e^x + 1 = 0$
3. l'équation $e^{x^2-x-11} = e$
4. l'inéquation $e^{-x} - 1 < 0$

▶ Exercice n°5
Soit f définie sur $[-10\,;+\infty[$ par $f(x) = 2xe^x$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $[-10\,;+\infty[$.

▶ Exercice n°6
Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-4x}$
2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+3}$
3. f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = e^{1-\frac{1}{x}}$
4. f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = e^{\frac{3x}{x+1}}$

▶ Exercice n°7
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x}$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} + \dfrac{1}{x}$
3. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} e^{\frac{1}{x^2}}$

▶ Exercice n°8
Après une injection intraveineuse de glucose, la glycémie (taux de glucose sanguin) peut-être modélisée par une fonction g de la forme $g(t) = Ae^{-Kt}$ où t est le temps écoulé en minutes depuis un instant choisi comme origine du temps et A et K sont des constantes.

1. Justifier qu'à l'instant $t = 0$, la glycémie est égale à A.
2. Une étude sur un patient a montré que sa glycémie était égale à 2 à l'instant $t = 0$ et que la constante K qui lui correspond est égal à 0,016. On a donc $g(t) = 2e^{-0{,}016t}$.
   a) Déterminer la glycémie de ce patient à $t = 10$ minutes. On donnera une valeur approchée du résultat à 0,01 près.
   b) Justifier mathématiquement que g est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
   c) Préciser $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t)$.

▶ Exercice n°9

Compléter les équivalences suivantes :

1. $e^x = 7 \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$
2. $e^x = 0{,}01 \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$
3. $e^{-x} = 0{,}9 \Leftrightarrow -x = \ldots\ldots \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$
4. $e^{-2x} = 3 \Leftrightarrow -2x = \ldots\ldots \Leftrightarrow x = \ldots\ldots$

▶ Exercice n°10

Simplifier les expressions suivantes :

$A = e^{\ln 7}$ $\quad B = e^{-\ln 5}$ $\quad C = e^{3\ln 4}$
$D = e^{\ln 5 + \ln 4}$ $\quad E = e^{-2\ln 7}$

▶ Exercice n°11

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. l'équation $e^x = 3$
2. l'équation $e^{x+3} = 5$
3. l'équation $3e^{-x} - 9 = 0$
4. l'inéquation $e^x \geqslant 7$
5. l'inéquation $8 - 2e^x \geqslant 0$

▶ Exercice n°12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 4e^x$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$
2. En remarquant que $f(x) = e^x(e^x - 4)$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. La courbe C_f admet-elle des asymptotes horizontales ?
4. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x - 2 \geqslant 0$.
   b) Dériver f et montrer que $f'(x) = 2e^x(e^x - 2)$.
   c) Déduire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice n°13

Un solide dont la température à l'instant $t = 0$ est de 25 C est placé à l'extérieur, où la température est de 8 C. La température de ce corps (en degré celsius) à l'instant t (en secondes) est donné par $\theta(t) = 8 + 17e^{kt}$ où k est une constante réelle.

1. On observe qu'au bout de deux minutes, la température du solide est de 20 C. En déduire une valeur arrondie de k à 0,0001 près.
2. Au bout de combien de temps, la température du solide sera-t-elle de 15 C ?

▶ Exercice n°14

Un corps radioactif se désintègre en transformant une partie de ses noyaux suivant la loi $N(t) = N_0e^{-kt}$ où N_0 est le nombre de noyaux radioactifs au début de l'observation, $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs à l'instant t exprimé en heures, k une constante réelle.

1. Déterminer une valeur arrondie à 0,001 près de la constante k pour le thorium, sachant qu'avec $N_0 = 1000$, on a $N(1) = 937$.
2. Au bout de combien de temps le nombre de noyaux de thorium passera-t-il de 1000 à 500 ?
3. Au bout de combien de temps le nombre de noyaux de thorium passera-t-il de 500 à 250 ?

▶ Exercice n°15

La température, en degrés celsius, d'une réaction chimique à l'instant t, en minutes, est donnée par $f(t) = (20t + 10)e^{-0{,}5t}$.

1. Donner la température initiale (celle correspondant à $t = 0$).
2. La température de la réaction peut-elle passer en dessous de 0 ?
3. Étudier les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

▶ Exercice n°16

Le taux d'hydratation de la peau, x heures après avoir appliqué une crème solaire, est modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 50x\,e^{-0{,}5x+1}$.

1. En étudiant les variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$, déterminer le moment où le taux d'hydratation est maximal.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 50$ admet deux solutions : une dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ et une autre dans l'intervalle $[5\,;\,5{,}5]$.
3. La crème solaire ne peut être commercialisée que si le taux d'hydratation dépasse 50% pendant une durée dépassant 6 heures. Ce critère est-il rempli ?

▶ Exercice n°17

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1 - e^{-0{,}39x} > 0$.
2. On admet que, pour emprunter 100 000 euros au taux annuel de 4% remboursable en t années ($t > 1$), le montant annuel à rembourser est donné (en milliers d'euros) par $f(t) = \dfrac{4}{1 - e^{-0{,}39t}}$.
   a) Quelle est le montant annuel à rembourser si l'emprunt doit être remboursé sur 10 ans ? sur 15 ans ?
   b) Justifier que la fonction f est décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$.
   c) Justifier que le montant annuel à rembourser est toujours supérieur à 4 000 euros.