Suites numériques

https://www.xm1math.net

1. Rappels

Définition

Une suite (U_n) est dite définie de façon explicite si on connait une formule permettant de calculer directement n'importe quel terme U_n en fonction de n.

Exemple(s)

Soit (U_n) définie par $U_n = 3 \times 2^n$.
On a $U_0 = 3 \times 2^0 = 3$ et $U_5 = 3 \times 2^5 = 96$

Définition

Une suite (U_n) est dite définie de façon récurrente si on connait son premier terme et une relation permettant de calculer un terme en fonction du précédent.

Exemple(s)

Soit (U_n) définie par $U_0 = 5$ et $U_{n+1} = 2 \times U_n - 3$ (ce qui veut dire qu'un terme est égal à deux fois le terme précédent moins trois).
On a $U_1 = 2 \times U_0 - 3 = 7$ et $U_2 = 2 \times U_1 - 3 = 11$

xm1math.net

2. Limites de suites

a) Généralités

Définition

- On dit que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ si on peut toujours trouver un rang n à partir duquel U_n est aussi grand que l'on veut.
- On dit que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$ si on peut toujours trouver un rang n à partir duquel U_n est aussi petit que l'on veut.
- On dit que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$ (l réel) si on peut toujours trouver un rang n à partir duquel U_n est aussi proche de l que l'on veut.

Théorème

Étant f une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ et (U_n) la suite définie de façon explicite par $U_n = f(n)$:

- *Si* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$;
- *Si* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$;
- *Si* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ *alors* $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$.

Autrement dit, on procède dans le cas des suites explicites comme pour des limites de fonction.

xm1math.net

2. Limites de suites

Exemple(s)

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + 1 = -\infty$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} -n = -\infty$ et la limite de la fonction exponentielle en $-\infty$ est 0.

b) Théorème de comparaison et théorème des gendarmes

Théorème

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$, $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = l'$ *et si, pour tout* n, $U_n < V_n$ *alors on peut en déduire que* $l \leqslant l'$.

Théorème

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$, $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = l$ *et si, à partir d'un certain rang on a,* $U_n \leqslant W_n \leqslant V_n$ *alors on peut en déduire que* $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = l$. *(théorème des « gendarmes »)*

Exemple(s)

Soit (W_n) définie par $W_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$. Pour tout entier positif n, $\frac{-1}{n+1} \leqslant \frac{(-1)^n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}$. Et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on peut en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0$.

2. Limites de suites

c) Limite de q^n

Théorème

- *Si* $q > 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- *Si* $0 < q < 1$ $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

Démonstration :
$\ln(q^n) = n \ln q$, on peut en déduire que $q^n = \mathrm{e}^{n \ln q}$. Dès lors :

- si $q > 1$, $\ln q > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln q = +\infty$. Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{n \ln q} = +\infty$.
- si $0 < q < 1$, $\ln q < 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln q = -\infty$. Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{n \ln q} = 0$.

Exemple(s)

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$ car $3 > 1$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$ car $0 < 0,8 < 1$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} 4 - 0,9^n \times 2 = 4$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$ vu que $0 < 0,9 < 1$.

xm1math.net

3. Sens de variation d'une suite

Propriété(s)

Une suite (U_n) *est croissante si, pour tout* n *(à partir d'un certain rang),* $U_{n+1} - U_n \geqslant 0$.
Dans le cas où tous les termes sont strictement positifs, cela équivaut à dire que, pour tout n, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \geqslant 1$.

Exemple(s)

Soit (U_n) définie par $U_n = 3 \times 4^n$. Pour tout n, U_n est strictement positif et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{3 \times 4^{n+1}}{3 \times 4^n} = 4 \geqslant 1$.
On peut en conclure que (U_n) est croissante.

Propriété(s)

Une suite (U_n) *est décroissante si, pour tout* n *(à partir d'un certain rang),* $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$.
Dans le cas où tous les termes sont strictement positifs, cela équivaut à dire que, pour tout n, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant 1$.

Exemple(s)

Soit (U_n) définie par $U_n = 10 \times 0,8^n$. Pour tout n, U_n est strictement positif et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{10 \times 0,8^{n+1}}{10 \times 0,8^n} = 0,8 \leqslant 1$. On peut en conclure que (U_n) est décroissante.

4. Suites arithmétiques

Définition

Une suite (U_n) est dite **arithmétique** si l'on passe d'un terme au terme suivant **en ajoutant toujours par le même nombre** r, appelé raison de la suite.
Autrement dit : pour tout n, on a $U_{n+1} = U_n + r$

Propriété(s)

Si (U_n) *est une suite arithmétique de raison* r *alors pour tous les entiers positifs* n *et* p*, on a :* $U_n = U_0 + nr$ *et* $U_n = U_p + (n - p)r$

Propriété(s)

Une suite arithmétique de raison r *positive est croissante et une suite arithmétique de raison* r *négative est décroissante.*

Remarque(s)

Pour montrer qu'une suite (U_n) est géométrique :

- Soit l'énoncé indique que l'on passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours par le même nombre : on peut alors conclure directement que la suite est arithmétique de raison égale à ce nombre.
- Soit on montre que, pour tout n, la différence $U_{n+1} - U_n$ reste constante.
  Exemple avec (U_n) définie par $U_n = 0,8n + 2$: pour tout n,
  $U_{n+1} - U_n = 0,8(n + 1) + 2 - 0,8n - 2 = 0,8$. On peut en conclure que (U_n) est arithmétique de raison $r = 0,8$.

4. Suites arithmétiques

Propriété(s)

Si (U_n) *est arithmétique de raison* r *alors pour tous entiers* n *et* p *avec* $p < n$ *:*

$$U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = (n - p + 1) \times \frac{U_p + U_n}{2} = (\text{nb de termes}) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2}$$

Exemple(s)

Soit (U_n) la suite arithmétique de 1$^{\text{er}}$ terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 3$.

- $U_{10} = U_0 + 10r = 2 + 10 \times 3 = 32$
- $U_{33} = U_0 + 33r = 2 + 33 \times 3 = 101$
- Pour tout n, $U_n = U_0 + nr = 2 + 3n$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 2 + 3n = +\infty$.
- (U_n) est croissante car sa raison est positive
- $U_0 + U_1 + \cdots + U_{10} = 11 \times \dfrac{2 + 32}{2} = 187$

xm1math.net

5. Suites géométriques

Définition

Une suite (U_n) est dite **géométrique** si l'on passe d'un terme au terme suivant **en multipliant toujours par le même nombre** q, appelé raison de la suite.
Autrement dit : pour tout n, on a $U_{n+1} = q \times U_n$

Remarque(s)

- Si l'on passe d'un terme au terme suivant en l'augmentant à chaque fois de $t\%$, cela revient à le multiplier par $1 + \frac{t}{100}$. La suite est donc géométrique de raison $q = 1 + \frac{t}{100}$.
- Si l'on passe d'un terme au terme suivant en le diminuant à chaque fois de $t\%$, cela revient à le multiplier par $1 - \frac{t}{100}$. La suite est donc géométrique de raison $q = 1 - \frac{t}{100}$.

Propriété(s)

Si (U_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 0$ alors pour tous les entiers positifs n et p, on a : $U_n = q^n \times U_0$ et $U_n = q^{n-p} \times U_p$

Propriété(s)

- *Si le premier terme est positif et si $q > 1$ alors la suite géométrique de raison q est croissante.*
- *Si le premier terme est positif et si $0 < q < 1$ alors la suite géométrique de raison q est décroissante.*

5. Suites géométriques

Remarque(s)

Pour montrer qu'une suite (U_n) est géométrique :

- Soit l'énoncé indique que l'on passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre (ce qui est le cas avec des évolutions fixes en pourcentage) : on peut alors conclure directement que la suite est géométrique de raison égale à ce nombre.
- Soit on montre que, pour tout n, le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ reste constant (en supposant que U_n n'est jamais nul).

Exemple(s)

La suite (U_n) définie par $U_n = 3 \times 0,7^n$ est-elle géométrique ?

Pour tout n, on a $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{3 \times 0,7^{n+1}}{3 \times 0,7^n} = 0,7^{n+1-n} = 0,7 = \text{constante}$.

On peut en conclure que (U_n) est géométrique de raison $q = 0,7$.

Propriété(s)

- *Pour tout réel* $q \neq 1$: $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- *Si* (U_n) *est une suite géométrique de raison* $q \neq 1$ *alors pour tous les entiers* n *et* p *avec* $p < n$:

  $$U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = U_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$$

5. Suites géométriques

Exemple(s)

Soit (U_n) la suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de 1er terme $U_0 = 512$.

- $U_4 = 0,5^4 \times 512 = 32$.
- Pour tout n, $U_n = q^n \times U_0 = 512 \times 0,5^n$.
- $U_0 > 0$ et $0 < q < 1$, donc (U_n) est décroissante .
- $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 512 \times 0,5^n = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$ puisque $0 < 0,5 < 1$.
- Recherche de plus petit entier n tel que $U_n \leqslant 0,01$:

  $512 \times 0,5^n \leqslant 0,01 \Leftrightarrow 0,5^n \leqslant \frac{0,01}{512} \Leftrightarrow \ln\left(0,5^n\right) \leqslant \ln\left(\frac{0,01}{512}\right) \Leftrightarrow n\ln(0,5) \leqslant \ln\left(\frac{0,01}{512}\right) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{0,01}{512}\right)}{\ln(0,5)}$

  $(\ln(0,5) < 0$, on change le sens de l'inégalité en divisant)

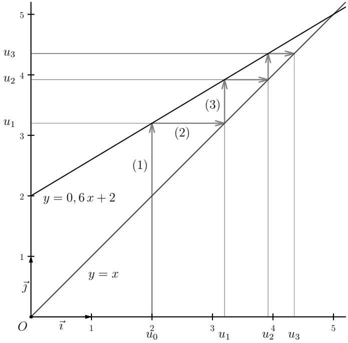
  Or, $\dfrac{\ln\left(\frac{0,01}{512}\right)}{\ln(0,5)} \approx 15,6$. Le plus petit entier qui convient est $n = 16$.
- $U_0 + U_1 + \cdots + U_9 = U_0 \times \dfrac{1 - 0,5^{10}}{1 - 0,5} = 512 \times \dfrac{1 - 0,5^{10}}{0,5} = 1023$
- Pour tout $n > 0$, $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1} = 512 \times \dfrac{1 - 0,5^n}{1 - 0,5} = 1024\left(1 - 0,5^n\right)$.

  Et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1024\left(1 - 0,5^n\right) = 1024$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$.

6. Exemple de suite récurrente définie par $U_{n+1} = a\,U_n + b$

Exemple(s)

Soit (U_n), la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 0,6\,U_n + 2$.
a) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite.
On trace d'abord la droite D d'équation $y = 0,6\,x + 2$ et la droite d'équation $y = x$.
On part de U_0 en abscisse : l'ordonnée du point de la droite D correspondant à cette abscisse nous donne U_1 [(1) *sur le graphique*] .
Pour déterminer $U_2 = f\,(U_1)$, il nous faut rabattre U_1 sur l'axe des abscisses [(2) *sur le graphique*] en utilisant la droite d'équation $y = x$.
Dès lors, U_2 est l'ordonnée du point de la droite D d'abscisse U_1 [(3) *sur le graphique*].
Pour poursuivre la construction, on répète le procédé en rabattant U_2 sur l'axe des abscisses...



6. Exemple de suite récurrente définie par $U_{n+1} = a\,U_n + b$

b) Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 5$ est géométrique.

Méthode générale :

- on calcule $\dfrac{V_{n+1}}{V_n}$ en exprimant V_n et V_{n+1} en fonction de U_n et de U_{n+1} :
  $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1}-5}{U_n-5}$
- on remplace alors U_{n+1} par ce qu'indique la définition de la suite (U_n) :
  $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1}-5}{U_n-5} = \dfrac{0,6\,U_n+2-5}{U_n-5}$
- on simplifie le numérateur et on le factorise par le coefficient devant U_n :
  $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1}-5}{U_n-5} = \dfrac{0,6\,U_n+2-5}{U_n-5} = \dfrac{0,6\,U_n-3}{U_n-5} = \dfrac{0,6\left(U_n-\frac{3}{0,6}\right)}{U_n-5}$
  $= \dfrac{0,6\,(U_n-5)}{U_n-5} = 0,6$

Pour tout n, on a $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = 0,6$. Cela prouve bien que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,6$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 5 = 2 - 5 = -3$.

c) En déduire l'expression de V_n, puis de U_n en fonction de n.

Pour tout n, $V_n = q^n \times V_0 = -3\,(0,6)^n$.

$V_n = U_n - 5 \Leftrightarrow U_n = V_n + 5 = -3\,(0,6)^n + 5$

d) Déterminer la limite de la suite (U_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -3\underbrace{(0,6)^n}_{\to 0}+5 = 5$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} (0,6)^n = 0$ car $0 < 0,6 < 1$).

6. Exemple de suite récurrente définie par $U_{n+1} = a\,U_n + b$

e) Étudier le sens de variation de la suite (U_n).
Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = -3\,(0,6)^{n+1} + 5 - [-3\,(0,6)^n + 5] = -3\,(0,6)^{n+1} + 3\,(0,6)^n$
$= 3\,(0,6)^n \times [-0,6 + 1] = 3\,(0,6)^n \times 0,4 = 1,2\,(0,6)^n$.
Le résultat étant positif pour tout n, on en déduit que (U_n) est croissante.

f) Déterminer le plus petit entier n tel que $U_n > 4,997$.
$U_n > 4,997 \Leftrightarrow -3\,(0,6)^n + 5 > 4,997 \Leftrightarrow -3\,(0,6)^n > -0,003 \Leftrightarrow 0,6^n < 0,001$
$\Leftrightarrow \ln\left(0,6^n\right) < \ln(0,001) \Leftrightarrow n\ln(0,6) < \ln(0,001) \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,6)}$ (car $\ln(0,6) < 0$).

Or, $\dfrac{\ln(0,001)}{\ln(0,6)} \approx 13,5$. Le plus petit entier qui convient est donc 14.

g) Calculer $V_0 + V_1 + \cdots + V_9$ et en déduire $U_0 + U_1 + \cdots + U_9$.
(V_n) est géométrique.

Donc, $V_0 + V_1 + \cdots + V_9 = V_0 \times \dfrac{1-(0,6)^{10}}{1-0,6} = -3 \times \dfrac{1-(0,6)^{10}}{0,4} \approx -7,45$.
Pour tout n, $U_n = V_n + 5$. Donc, $U_0 + U_1 + \cdots + U_9 = V_0 + 5 + V_1 + 5 + \cdots + V_9 + 5$
$= V_0 + V_1 + \cdots + V_9 + 50 \approx 42,55$.

h) Déterminer l'expression de $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ en fonction de n.
$S_n = V_0 + 5 + V_1 + 5 + \cdots + V_n + 5 = V_0 + V_1 + \cdots + V_n + 5(n+1)$.
Or (V_n) est géométrique.

Donc, $V_0 + V_1 + \cdots + V_n = V_0 \times \dfrac{1-(0,6)^{n+1}}{1-0,6} = -3 \times \dfrac{1-(0,6)^{n+1}}{0,4}$

$= -7,5 \times \left(1 - (0,6)^{n+1}\right)$.
D'où, $S_n = -7,5 \times \left(1 - (0,6)^{n+1}\right) + 5(n+1)$.

xm1math.net

Fin du chapitre