Primitives - Intégration

©Pascal Brachet (CC BY NC SA)

https://www.xm1math.net

1. Primitives d'une fonction sur un intervalle

a) Généralités

Définition

On appelle **primitive** d'une fonction f sur un intervalle I toute fonction F dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I.

Exemple(s)

La fonction F définie par $F(x) = x^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = 2x$ car, pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$.

Remarque(s)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Propriété(s)

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I.
Si F est ***une*** *primitive de f sur I alors* ***toutes*** *les primitives de f sur I sont de la forme $x \mapsto F(x) + C$ où C est une constante.*

1. Primitives d'une fonction sur un intervalle

Exemple(s)

Soit f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

- **Une** primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$ est définie par $F(x) = \ln x$.
- **Les** primitives de f sur $]0\,;\,+\infty[$ sont définies par $F(x) = \ln x + C$.
- **La** primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$ telle que $F(1) = 4$ est définie par $F(x) = \ln x + 4$.

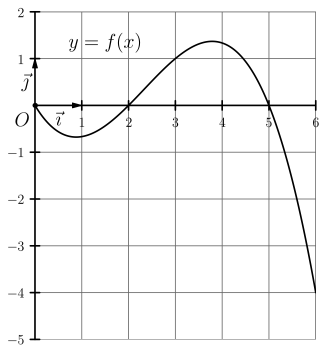
b) Lien entre une fonction et ses primitives

- **Rappel :** F primitive de f sur $I \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.
- **Conséquences :**
  - Les variations de F sont données par le signe de $F'(x) = f(x)$;
  - Les variations de F donnent le signe de $F'(x) = f(x)$.

Exemple(s)

Soit f une fonction dérivable sur $[0\,;\,6]$ dont la courbe est donnée ci-contre. On note F une de ses primitives.

1. Détermination de $F'(2)$: $F'(2) = f(2) = 0$
2. Détermination de $F'(3)$: $F'(3) = f(3) = 1$
3. Détermination des variations de F :
   - Sur $[0\,;\,2]$, $f(x)$ est négatif donc F est décroissante sur $[0\,;\,2]$.
   - Sur $[2\,;\,5]$, $f(x)$ est positif donc F est croissante sur $[2\,;\,5]$.
   - Sur $[5\,;\,6]$, $f(x)$ est négatif donc F est décroissante sur $[5\,;\,6]$.



1. Primitives d'une fonction sur un intervalle

c) Primitives des fonctions usuelles

$f(x) = a$	$F(x) = ax$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{x^2}{2}$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \dfrac{x^3}{3}$
$f(x) = x^3$	$F(x) = \dfrac{x^4}{4}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$F(x) = -\dfrac{1}{x}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^3}$	$F(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$F(x) = \mathrm{e}^x$
$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$	$F(x) = -\mathrm{e}^{-x}$
$f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$	$F(x) = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{e}^{ax+b}$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$

xm1math.net

1. Primitives d'une fonction sur un intervalle

d) Formules générales

Primitives de $f+g$

Si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.

Exemple(s)

- Une primitive de f définie par $f(x)=x+3$ est définie par $F(x)=\frac{x^2}{2}+3x$.
- Une primitive de f définie par $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ est définie par $F(x)=\frac{x^3}{3}+\ln x$.
- Une primitive de f définie par $f(x)=\mathrm{e}^{3x}+1$ est définie par $F(x)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}+x$.

Primitives de kf (k réel)

Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel k, kF est une primitive de kf sur I.

Exemple(s)

- Une primitive de f définie par $f(x)=3x$ est définie par $F(x)=3\frac{x^2}{2}$.
- Une primitive de f définie par $f(x)=\frac{-4}{x}=-4\times\frac{1}{x}$ est définie par $F(x)=-4\ln x$.
- Une primitive de f définie par $f(x)=10\,\mathrm{e}^{-2x}$ est définie par $F(x)=10\times\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right)=-5\,\mathrm{e}^{-2x}$.

xm1math.net

1. Primitives d'une fonction sur un intervalle

Primitives de $f-g$

Si F est une primitive de f sur I et si G est une primitive de g sur I alors $F-G$ est une primitive de $f-g$ sur I.

Exemple(s)

- Une primitive de f définie par $f(x)=x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}$ est définie par $F(x)=\frac{x^3}{3}-2\sqrt{x}$.
- Une primitive de f définie par $f(x)=\mathrm{e}^{-x}-5x$ est définie par $F(x)=-\mathrm{e}^{-x}-5\frac{x^2}{2}$.

Primitives de $U'\,U$

Si f peut s'écrire sous la forme $U'\,U$ (où U est une fonction dérivable) alors une primitive de f est $\dfrac{U^2}{2}$.

Exemple(s)

- Soit f définie par $f(x)=\frac{1}{x}\times\ln x$. f est sous la forme $U'\,U$ avec $U(x)=\ln x$.
  Une primitive de f est donc définie par $F(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}$.

xm1math.net

1. Primitives d'une fonction sur un intervalle

Primitives de $\dfrac{U'}{U}$ $(U > 0)$

Si f peut s'écrire sous la forme $\dfrac{U'}{U}$ (où U est une fonction dérivable et à valeurs strictement positives) alors une primitive de f est $\ln(U)$.

Exemple(s)

- Soit f définie par $f(x) = \frac{5}{5x+3}$. f est sous la forme $\frac{U'}{U}$ avec $U(x) = 5x+3$.
  Une primitive de f est donc définie par $F(x) = \ln(5x+3)$.
- Soit f définie par $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$. f est sous la forme $\frac{U'}{U}$ avec $U(x) = x^2+1$.
  Une primitive de f est donc définie par $F(x) = \ln\left(x^2+1\right)$.
- Soit f définie par $f(x) = \frac{10x}{x^2+1}$. f n'est pas tout à fait sous la forme $\frac{U'}{U}$. Il faudrait au numérateur $2x$ au lieu de $10x$.
  En écrivant que $f(x) = 5 \times \frac{2x}{x^2+1}$, on a alors $f(x) = 5 \times \frac{U'}{U}$ avec $U(x) = x^2+1$.
  Une primitive de f est donc définie par $F(x) = 5 \times \ln\left(x^2+1\right)$.

xm1math.net

1. Primitives d'une fonction sur un intervalle

Primitives de $U'\,\mathrm{e}^U$

Si f peut s'écrire sous la forme $U'\,\mathrm{e}^U$ (où U est une fonction dérivable) alors une primitive de f est e^U.

Exemple(s)

- Soit f définie par $f(x) = 3x^2\,\mathrm{e}^{(x^3)}$. f est sous la forme $U'\,\mathrm{e}^U$ avec $U(x) = x^3$.
  Une primitive de f est donc définie par $F(x) = \mathrm{e}^{(x^3)}$.
- Soit f définie par $f(x) = -2x\,\mathrm{e}^{(-x^2+1)}$. f est sous la forme $U'\,\mathrm{e}^U$ avec $U(x) = -x^2+1$.
  Une primitive de f est donc définie par $F(x) = \mathrm{e}^{(-x^2+1)}$.
- Soit f définie par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{(-x^2+1)}$. f n'est pas exactement sous la forme $U'\,\mathrm{e}^U$. Il faudrait $-2x$ devant l'exponentiel.
  Mais en écrivant que $f(x) = -\frac{1}{2}\left(-2x\,\mathrm{e}^{(-x^2+1)}\right)$, on a alors $f(x) = -\frac{1}{2}\left(U'\,\mathrm{e}^U\right)$ avec $U(x) = -x^2+1$.
  Une primitive de f est donc définie par $F(x) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{(-x^2+1)}$.

xm1math.net

2. Intégrale d'une fonction sur un intervalle

Définition

Étant donné f une fonction continue sur un intervalle I : pour tous réels a et b de I, on appelle intégrale de a à b de f le réel noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I. *(a et b sont appelées bornes de l'intégrale)*

Remarque(s)

Le crochet $[F(x)]_a^b$ n'est qu'une notation qui permet d'indiquer une primitive de f et qui signifie qu'il faudra ensuite calculer $F(b) - F(a)$.

Exemple(s)

1. $\displaystyle\int_1^7 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^7 = \ln 7 - \ln 1 = \ln 7$
2. $\displaystyle\int_1^3 2x + 4\,\mathrm{d}x = \left[x^2 + 4x\right]_1^3 = (3^2 + 4\times 3) - (1^2 + 4\times 1) = 21 - 5 = 16$
3. $\displaystyle\int_0^2 3 + \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[3x - \mathrm{e}^{-x}\right]_0^2 = \left(3\times 2 - \mathrm{e}^{-2}\right) - \left(3\times 0 - \mathrm{e}^{0}\right) = 6 - \mathrm{e}^{-2} - (-1) = 7 - \mathrm{e}^{-2}$

xm1math.net

2. Intégrale d'une fonction sur un intervalle

Propriété(s)

Pour f et g continues sur un intervalle I et pour tous a, b et c de I :

- $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *(en changeant l'ordre des bornes, on obtient l'opposé de l'intégrale)*
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ *(Relation de Chasles)*
- $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *(linéarité de l'intégrale)*
- *Pour tout réel k,* $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *(linéarité de l'intégrale)*
- *Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- *Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \leqslant 0$ sur $[a,b]$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$
- *Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[a,b]$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

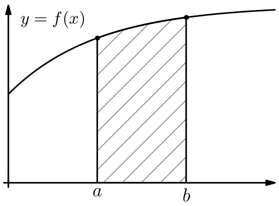
xm1math.net

3. Application au calcul d'aire

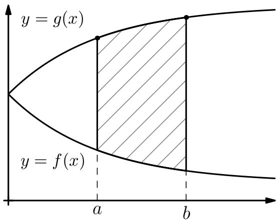
Propriété(s)

f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$.

• *Si pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors* ***l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses*** *et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ en* ***unités d'aire***.



• *Si pour tout x de $[a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors* ***l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes de f et g*** *et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x$ en* ***unités d'aire***. *(« intégrale de la plus grande moins la plus petite »)*



3. Application au calcul d'aire

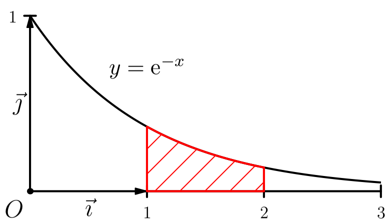
Remarque(s)

• Pour avoir l'aire en cm^2, il faut multiplier le résultat en unités d'aire par :
(la valeur en cm d'une unité sur l'axe des abscisses) $\times$ *(la valeur en cm d'une unité sur l'axe des ordonnées)*.

• Si f ne prend que des valeurs négatives sur $[a, b]$, alors **l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses** et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale cette fois à $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ en **unités d'aire**.

Exemple(s)

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$. L'aire A de la partie hachurée (comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$) est égale, en unités d'aire, à $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$. *($f$ étant positive sur* $[1 ; 2]$*)*

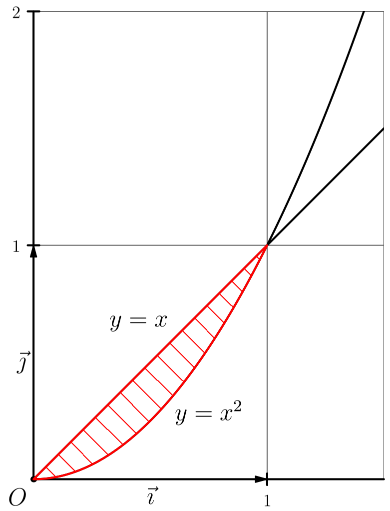


On a donc $A = \int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^2 = -\mathrm{e}^{-2} - \left(-\mathrm{e}^{-1}\right) = -\mathrm{e}^{-2} + \mathrm{e}^{-1}$ unités d'aire.

3. Application au calcul d'aire

Exemple(s)

2. Soit f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. L'aire A de la partie hachurée (comprise entre la courbe de f, la courbe de g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$) est égale, en unités d'aire, à $\displaystyle\int_0^1 f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$.

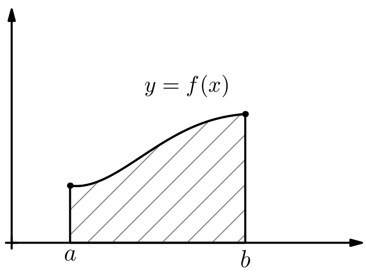


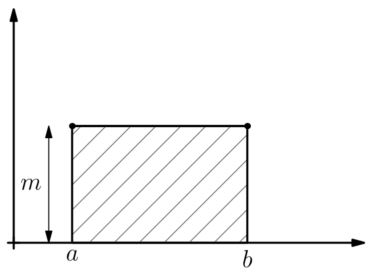
$f(x) - g(x) = x - x^2 = x(1-x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,1]$
f est bien la plus grande sur $[0\,;\,1]$.

On a donc $A = \displaystyle\int_0^1 x - x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) - (0-0) = \frac{1}{6}$ unités d'aire.

4. Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Principe : la valeur moyenne m d'une fonction continue et positive f sur un intervalle $[a\,;\,b]$ correspond à la hauteur du rectangle de base $[a\,;\,b]$ telle que l'aire de ce rectangle soit égale à l'aire sous la courbe de f sur $[a\,;\,b]$.





On doit donc avoir : $m \times (b-a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Définition

La **valeur moyenne** sur un intervalle $[a\,;\,b]$ d'une fonction continue et positive f est le nombre égal à $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Fin du chapitre

xm1math.net