Lois de probabilités discrètes

©Pascal Brachet (CC BY NC SA)

https://www.xm1math.net

xm1math.net

1. Rappels sur les probabilités dans un univers fini

a) Langage des événements

Lors d'une expérience aléatoire :

- L'univers est l'ensemble des résultats possibles.
- Un événement A est une partie de l'univers.
- Un événement élémentaire est un événement ne comportant qu'un seul élément.
- L'événement contraire de l'événement A est l'événement noté $\overline{A}$ formé de tous les éléments de l'univers n'appartenant pas à A.
- L'événement $A \cap B$ (noté aussi « A et B ») est l'événement formé des éléments de l'univers appartenant à A et à B.
- L'événement $A \cup B$ (noté aussi « A ou B ») est l'événement formé des éléments de l'univers appartenant au moins à l'un des événements A ou B.
- Deux événements A et B sont dits incompatibles si leur intersection est vide.

b) Loi de probabilité dans un univers fini

Définir une loi de probabilité pour un expérience aléatoire dont l'univers est fini, c'est associer à chaque événement un nombre compris entre 0 et 1 et appelé probabilité de l'événement de telle façon que :

- la somme des probabilités des événements élémentaires soit égale à 1 ;
- la probabilité d'un événement soit égalé à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

La loi de probabilité se définit en donnant dans un tableau la probabilité de tous les événements élémentaires.

1. Rappels sur les probabilités dans un univers fini

c) Propriétés générales des probabilités

Pour une expérience aléatoire telle que l'univers Ω soit fini et quelque soit la loi de probabilité :

- $p(\varnothing) = 0$ et $p(\Omega) = 1$
- Pour tout événement A, $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$
- Si un événement A est inclus dans un événement B, $p(A) \leqslant p(B)$
- $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$
- Si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
- Si A et B ne sont pas incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

d) Cas particulier de l'équiprobabilité

Quand tous les événements élémentaires ont la même probabilité de survenir, on dit que l'on est dans une situation d'équiprobabilité et dans ce cas là on a, pour tout événement A :
$p(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$ *(si l'univers est fini)*

xm1math.net

1. Rappels sur les probabilités dans un univers fini

e) Variable aléatoire associée à une expérience aléatoire

Si lors d'une expérience aléatoire, on associe à chaque issue possible une grandeur X, on dit que X est une **variable aléatoire** associée à l'expérience. Si on note alors $x_1, x_2, \cdots, x_n$ les valeurs possibles de X et $p_1, p_2, \cdots, p_n$ les probabilités que X prenne les valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$:

- On appelle **loi de probabilité** de X le tableau :

Valeurs possibles de X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Probabilités	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

- **L'espérance mathématique** de X est définie par $E(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$ et correspond à la valeur moyenne théorique que prend X si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.
- **La variance** de X est définie par $V(X) = p_1\left(x_1 - E(X)\right)^2 + p_2\left(x_2 - E(X)\right)^2 + \cdots + p_n\left(x_n - E(X)\right)^2$.
- **L'écart-type** de X est défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ et mesure la dispersion des valeurs de X autour de l'espérance quand on répète l'expérience.

Exemple(s)

On lance un dé. Le joueur gagne 6 euros s'il obtient un « 1 » ou un « 6 » et il perd 2 euros dans le cas contraire. Soit X le gain du joueur.
X ne peut prendre que les valeurs -2 et 6 et on a $p(X = -2) = \frac{2}{3}$ et $p(X = 6) = \frac{1}{3}$.

La loi de probabilité de X est donc :

x_i	-2	6
p_i *(la somme doit être égale à 1)*	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Et on a : $E(X) = \frac{2}{3} \times (-2) + \frac{1}{3} \times 6 = \frac{2}{3}$ *(gain moyen qu'un joueur peut espérer en effectuant un grand nombre de lancers)*

2. Premiers cas de lois de probabilités discrètes

a) Loi uniforme discrète sur $\{1; 2; \cdots; n\}$

Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme discrète sur $\{1; 2; \ldots; n\}$ signifie que X prend ses valeurs de façon **équiprobable** dans $\{1; 2; \ldots; n\}$. On a alors :

- $p\left(X = k\right) = \dfrac{1}{n}$ pour tout entier k compris entre 1 et n.
- $E(X) = \frac{n+1}{2}$
  car $\frac{1}{n} \times 1 + \frac{1}{n} \times 2 + \cdots + \frac{1}{n} \times n = \frac{1}{n} \times (1 + 2 + \cdots + n) = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$

Exemple(s)

Si on lance un dé non truqué à 6 faces et si on note X le numéro de la face obtenue, X suit la loi uniforme discrète sur $\{1; 2; \ldots; 6\}$.
La probabilité d'obtenir une certaine face est égale à $\frac{1}{6}$ et $E(X) = \frac{6+1}{2} = 3,5$

b) Épreuve de Bernoulli

Définition

On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre)

©Pascal Brachet (CC BY NC SA)

2. Premiers cas de lois de probabilités discrètes

Exemple(s)

- Lancer une pièce et s'intéresser à la face obtenue est une épreuve de Bernoulli ;
- Lancer un dé et ne s'intéresser qu'aux événements « obtenir un 6 » et « ne pas obtenir un 6 » est une épreuve de Bernoulli.
- Lancer un dé et s'intéresser à chacun des faces possibles n'est pas une épreuve de Bernoulli.

Remarque(s)

- Les deux issues contraires d'une *épreuve* de Bernoulli se note en général S (pour « succès ») et $\overline{S}$. La probabilité que S soit réalisé est noté en général p (la probabilité de $\overline{S}$ est alors $(1-p)$).
- Si on note X la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec :
  - La loi de probabilité de X est

x_i	0	1
p_i	$1-p$	p

  - On a alors $E(x) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$
    $V(X) = (1-p) \times (0-p)^2 + p(1-p)^2 = (1-p)p^2 + p(1-p)^2 = p(1-p)\left[p+1-p\right] = p(1-p)$
    et donc $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$

xm1math.net

©Pascal Brachet (CC BY NC SA)

3. Rappels sur les probabilités conditionnelles

a) Généralités

Définition

Étant donné deux événements A et B ($B \neq \varnothing$) d'un univers Ω, on appelle probabilité de B sachant A, le réel noté $p_A(B)$ tel que $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

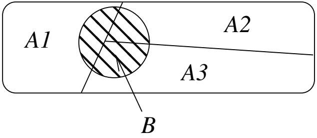
Propriété(s)

Pour tous événements non vides A et B :

- $0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1$; $\quad p_A\left(\overline{B}\right) = 1 - p_A(B)$
- *Dans le cas de l'équiprobabilité,* $p_A(B) = \dfrac{\text{nb de cas favorables pour A} \cap \text{B}}{\text{nb de cas favorables pour A}}$
- $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$

Formule des probabilités totales (exemple avec une partition à 3)

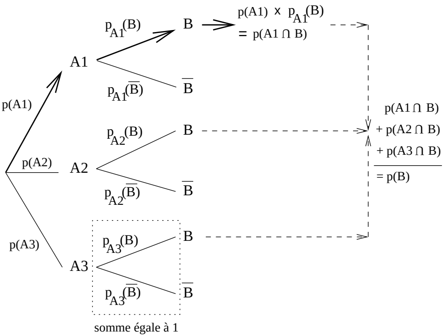
Si A_1, A_2, A_3 sont des événements non vides deux à deux incompatibles et dont l'union est égale à l'univers Ω (on dit alors qu'ils forment une partition de l'univers) alors pour tout événement B :
$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + p(A_3 \cap B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + p(A_3) \times p_{A_3}(B)$



©Pascal Brachet (CC BY NC SA)

3. Rappels sur les probabilités conditionnelles

b) Représentation à l'aide d'un arbre pondéré



▶ **Règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés :**

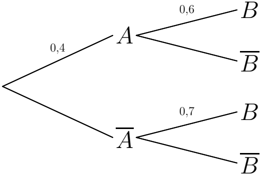
- Sur les premières branches, on inscrit les $p(A_i)$.
- Sur les branches du type $A_i \longrightarrow B$, on inscrit $p_{A_i}(B)$.
- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.

3. Rappels sur les probabilités conditionnelles

Exemple(s)

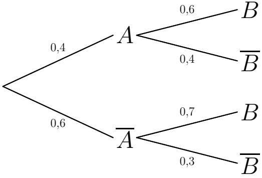
• Exemple 1

On considère l'arbre pondéré ci-dessous :



1. De quel évènement 0,6 est-il la probabilité ?
2. Compléter les probabilités manquantes sur l'arbre.
3. Calculer $p(A \cap B)$, $p\left(A \cap \overline{B}\right)$, $p\left(\overline{A} \cap B\right)$ et $p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$.
4. Calculer $p(B)$.
5. Calculer $p_B(A)$.

Réponses :
1. $p_A(B)$
2.



3. $p(A \cap B) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$;
$p\left(A \cap \overline{B}\right) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$;
$p\left(\overline{A} \cap B\right) = 0,6 \times 0,7 = 0,42$;
$p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$
4. $p(B) = p(A \cap B) + p\left(\overline{A} \cap B\right) = 0,24 + 0,42 = 0,66$
5. $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0,24}{0,66} = 0,364$

xm1math.net

©Pascal Brachet (CC BY NC SA)

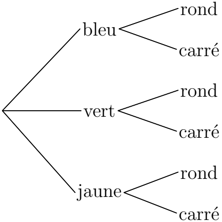
3. Rappels sur les probabilités conditionnelles

Exemple(s)

• Exemple 2

Un sac contient des jetons de trois couleurs, la moitié de blancs, le tiers de verts et le sixième de jaunes. 50% des jetons blancs, 30% des jetons verts et 40% des jetons jaunes sont ronds. Tous les autres jetons sont carrés. On tire au hasard un jeton.

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :

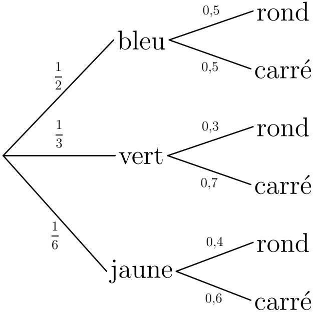


2. Quelle est la probabilité pour que le jeton tiré soit rond ?

3. Sachant que le jeton tiré est rond, quelle est la probabilité pour qu'il soit blanc ?

Réponses :

1.



2. $p\left(\text{rond}\right) = \frac{1}{2} \times 0,5 + \frac{1}{3} \times 0,3 + \frac{1}{6} \times 0,4 = \frac{5}{12} \approx 0,417$

3. $p_{\text{rond}}\left(\text{bleu}\right) = \dfrac{p(\text{rond} \cap \text{bleu})}{p(\text{rond})} = \dfrac{\frac{1}{2} \times 0,5}{\frac{5}{12}} = \dfrac{3}{5} = 0,6$

4. Indépendance en probabilité

a) Événements indépendants

Définition

Lors d'une expérience aléatoire, deux événements A et B sont dits indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, ce qui revient à dire que $p_A(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$.

Exemple(s)

Deux événements A et B sont tels que $p(A) = 0,4$, $p(B) = 0,5$ et $p(A \cup B) = 0,7$. A et B sont-ils indépendants ?
Réponse : on doit avoir $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, ce qui équivaut à $0,7 = 0,4 + 0,5 - p(A \cap B)$. On en déduit que $p(A \cap B) = 0,2$.
Or, $p(A) \times p(B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2$. On a $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$. On en conclut que A et B son indépendants.

b) Épreuves indépendantes

Deux épreuves sont dites indépendantes si le résultat de l'une n'a aucune influence sur le résultat de l'autre.
Les tirages successifs avec remise, par exemple, sont des épreuves indépendantes.

xm1math.net

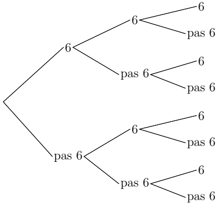
4. Indépendance en probabilité

Une expérience aléatoire consistant à répéter plusieurs fois de façon identique et indépendante une même épreuve peut se modéliser à l'aide d'un arbre pondéré où les probabilités sont les mêmes d'un niveau à l'autre.

Exemple(s)

On lance 3 fois de suite un dé (épreuves indépendantes) et on s'intéresse au fait d'obtenir un « 6 » ou non.

1. Compléter l'arbre pondéré correspondant à la situation :

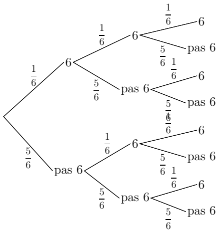


2. Calculer les probabilités suivantes :

- p(avoir trois fois un « 6 »)
- p(n'avoir aucun « 6 »)
- p(avoir exactement deux fois un « 6 »)

Réponses :

1.



2.

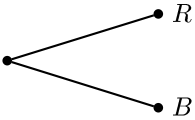
- $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ *(un seul chemin avec 3 branches « 6 »)*
- $\left(\frac{5}{6}\right)^3$ *(un seul chemin avec 3 branches « pas 6 »)*
- $3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)$
  (3 chemins avec 2 branches « 6 » et une « pas 6 »)

5. Recherche du nombre de chemins dans l'arbre pondéré schématisant une répétition d'épreuves identiques et indépendantes

On considère l'exemple suivant : Une boîte contient des jetons rouges et bleus et on s'intéresse au fait d'obtenir un certain nombre de jetons rouges lors de divers tirages successifs avec remise (tirages identiques et indépendants).

a) Tirage d'un jeton

La situation peut se schématiser à l'aide de l'arbre ci-dessous :



- On note $\binom{1}{0}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 0 jeton rouge lors de ce tirage d'1 jeton. On a donc $\binom{1}{0} = 1$.
- On note $\binom{1}{1}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 1 jeton rouge lors de ce tirage d'1 jeton. On a donc $\binom{1}{1} = 1$.

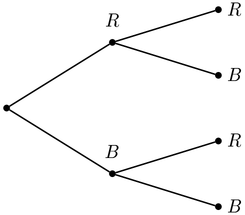
On a donc pour le moment :

nombre de chemins donnant :	0 jeton rouge	1 jeton rouge
Pour 1 jeton tiré	$\binom{1}{0} = 1$	$\binom{1}{1} = 1$

5. Recherche du nombre de chemins dans l'arbre pondéré schématisant une répétition d'épreuves identiques et indépendantes

b) Tirage de 2 jetons

La situation peut se schématiser à l'aide de l'arbre ci-dessous :



- On note $\binom{2}{0}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 0 jeton rouge lors de ce tirage de 2 jetons. On a donc $\binom{2}{0} = 1$.
- On note $\binom{2}{1}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 1 jeton rouge lors de ce tirage de 2 jetons. On a donc $\binom{2}{1} = 2$.
- On note $\binom{2}{2}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 2 jetons rouges lors de ce tirage de 2 jetons. On a donc $\binom{2}{2} = 1$.

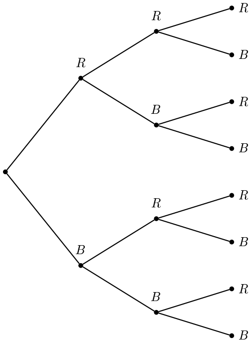
On a donc pour le moment :

nombre de chemins donnant :	0 jeton rouge	1 jeton rouge	2 jetons rouges
Pour 1 jeton tiré	$\binom{1}{0} = 1$	$\binom{1}{1} = 1$	■
Pour 2 jetons tirés	$\binom{2}{0} = 1$	$\binom{2}{1} = 2$	$\binom{2}{2} = 1$

5. Recherche du nombre de chemins dans l'arbre pondéré schématisant une répétition d'épreuves identiques et indépendantes

c) Tirage de 3 jetons

La situation peut se schématiser à l'aide de l'arbre ci-dessous :



- On note $\binom{3}{0}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 0 jeton rouge lors de ce tirage de 3 jetons. On a donc $\binom{3}{0} = 1$.
- On note $\binom{3}{1}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 1 jeton rouge lors de ce tirage de 3 jetons. On a donc $\binom{3}{1} = 3$.
- On note $\binom{3}{2}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 2 jetons rouges lors de ce tirage de 3 jetons. On a donc $\binom{3}{2} = 3$.
- On note $\binom{3}{3}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 3 jetons rouges lors de ce tirage de 3 jetons. On a donc $\binom{3}{3} = 1$.

5. Recherche du nombre de chemins dans l'arbre pondéré schématisant une répétition d'épreuves identiques et indépendantes

On a donc pour le moment :

nombre de chemins donnant :	0 jeton rouge	1 jeton rouge	2 jetons rouges	3 jetons rouges
Pour 1 jeton tiré	$\binom{1}{0} = 1$	$\binom{1}{1} = 1$	■	■
Pour 2 jetons tirés	$\binom{2}{0} = 1$	$\binom{2}{1} = 2$	$\binom{2}{2} = 1$	■
Pour 3 jetons tirés	$\binom{3}{0} = 1$	$\binom{3}{1} = 3$	$\binom{3}{2} = 3$	$\binom{3}{3} = 1$

d) Tirage de 4 jetons (en imaginant l'arbre)

- Un seul chemin dans l'arbre permet d'obtenir 0 jeton rouge. On a donc, $\binom{4}{0} = 1$.
- Un seul chemin dans l'arbre permet d'obtenir 4 jetons rouges. On a donc, $\binom{4}{4} = 1$.
- En raisonnant sur les 3 premiers jetons tirés d'une part, puis sur le 4^{e}, il n'y a que deux manières d'obtenir 1 seul jeton rouge sur les 4 jetons tirés :

  Soit on a 0 jeton rouge sur les 3 premiers et le 4^{e} doit être rouge, ce qui représente $\binom{3}{0}$ possibilités ;

  Soit on a déjà 1 jeton rouge parmi les 3 premiers et le 4^{e} doit être bleu, ce qui représente $\binom{3}{1}$ possibilités ;

  On peut en conclure que $\binom{4}{1} = \binom{3}{0} + \binom{3}{1}$

5. Recherche du nombre de chemins dans l'arbre pondéré schématisant une répétition d'épreuves identiques et indépendantes

- En raisonnant sur les 3 premiers jetons tirés d'une part, puis sur le 4^e, il n'y a que deux manières d'obtenir exactement 2 jetons rouges sur les 4 jetons tirés :

  Soit on a déjà 1 jeton rouge sur les 3 premiers et le 4^e doit être rouge, ce qui représente $\binom{3}{1}$ possibilités ;

  Soit on a déjà 2 jetons rouges parmi les 3 premiers et le 4^e doit être bleu, ce qui représente $\binom{3}{2}$ possibilités ;

  On peut en conclure que $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2}$

- En raisonnant sur les 3 premiers jetons tirés d'une part, puis sur le 4^e, il n'y a que deux manières d'obtenir exactement 3 jetons rouges sur les 4 jetons tirés :

  Soit on a déjà 2 jetons rouges sur les 3 premiers et le 4^e doit être rouge, ce qui représente $\binom{3}{2}$ possibilités ;

  Soit on a déjà 3 jetons rouges parmi les 3 premiers et le 4^e doit être bleu, ce qui représente $\binom{3}{3}$ possibilités ;

  On peut en conclure que $\binom{4}{3} = \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$

xm1math.net

5. Recherche du nombre de chemins dans l'arbre pondéré schématisant une répétition d'épreuves identiques et indépendantes

On peut en déduire la dernière ligne du tableau :

nombre de chemins donnant :	0 jeton rouge	1 jeton rouge	2 jetons rouges	3 jetons rouges	4 jetons rouges
Pour 1 jeton tiré	$\binom{1}{0} = 1$	$\binom{1}{1} = 1$	■	■	■
Pour 2 jetons tirés	$\binom{2}{0} = 1$	$\binom{2}{1} = 2$	$\binom{2}{2} = 1$	■	■
Pour 3 jetons tirés	$\binom{3}{0} = 1$	$\binom{3}{1} = 3$	$\binom{3}{2} = 3$	$\binom{3}{3} = 1$	■
Pour 4 jetons tirés	$\binom{4}{0} = 1$	$\binom{4}{1} = 4$	$\binom{4}{2} = 6$	$\binom{4}{3} = 4$	$\binom{4}{4} = 1$
	↑ toujours 1	↑ 1+3 somme des 2 coefficients au dessus et à gauche	↑ 3+3 somme des 2 coefficients au dessus et à gauche	↑ 3+1 somme des 2 coefficients au dessus et à gauche	↑ toujours 1

xm1math.net

5. Recherche du nombre de chemins dans l'arbre pondéré schématisant une répétition d'épreuves identiques et indépendantes

e) cas général

On tire maintenant n jetons avec remise et, pour tout entier k compris entre 1 et n, on note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir k jetons rouges.
En extrapolant le mécanisme établi pour 4 jetons, on peut en déduire :

nombre de chemins donnant :	$\cdots$	$(k-1)$ jetons rouges	k jetons rouges	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
Pour $(n-1)$ jetons tirés	$\cdots$	$\binom{n-1}{k-1}$	$\binom{n-1}{k}$	$\cdots$
Pour n jetons tirés	$\cdots$	$\cdots$	$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$	$\cdots$

Grace à ce mécanisme, on peut en déduire le nombre de chemins pour 5 jetons tirés :

nombre de chemins donnant :	0 jeton rouge	1 jeton rouge	2 jetons rouges	3 jetons rouges	4 jetons rouges	5 jetons rouges
Pour 4 jetons tirés	$\binom{4}{0} = 1$	$\binom{4}{1} = 4$	$\binom{4}{2} = 6$	$\binom{4}{3} = 4$	$\binom{4}{4} = 1$	■
Pour 5 jetons tirés	$\binom{5}{0} = 1$	$\binom{5}{1} = 5$	$\binom{5}{2} = 10$	$\binom{5}{3} = 10$	$\binom{5}{4} = 5$	$\binom{5}{5} = 1$

5. Recherche du nombre de chemins dans l'arbre pondéré schématisant une répétition d'épreuves identiques et indépendantes

f) Application aux calculs des probabilités

On suppose maintenant que la boîte contient 4 jetons rouges et 6 jetons bleus. Lors du tirage d'un seul jeton, la probabilité d'obtenir un jeton rouge est donc égale à $\frac{4}{10} = 0,4$ et la probabilité d'obtenir un jeton bleu est égale à $\frac{6}{10} = 0,6$. On tire successivement 5 jetons avec remise et on note X la variable aléatoire égale au nombre de jetons rouges obtenus lors de ce tirage de 5 jetons avec remise.

- Pour calculer $p(X = 2)$, il suffit d'imaginer tous les chemins de l'arbre pondéré qui comportent exactement 2 jetons rouges : Si ces chemins comportent 2 branches donnant un jeton rouge (avec $0,4$ comme probabilité sur la branche), ils en comportent forcément 3 donnant un jeton bleu (avec $0,6$ comme probabilité sur la branche). Donc la probabilité correspondant à un tel chemin est forcément égale à $(0,4)^2 \times (0,6)^3$. Or il y a exactement $\binom{5}{2}$ chemins de ce type. On a donc :

  $p(X = 2) = \binom{5}{2} \times (0,4)^2 \times (0,6)^3 = 10 \times 0,4^2 \times 0,6^3 \approx 0,3456$

- Pour calculer $p(X = 4)$, il suffit d'imaginer tous les chemins de l'arbre pondéré qui comportent exactement 4 jetons rouges : Si ces chemins comportent 4 branches donnant un jeton rouge (avec $0,4$ comme probabilité sur la branche), ils en comportent forcément une seule donnant un jeton bleu (avec $0,6$ comme probabilité sur la branche). Donc la probabilité correspondant à un tel chemin est forcément égale à $(0,4)^4 \times (0,6)^1$. Or il y a exactement $\binom{5}{4}$ chemins de ce type. On a donc :

  $p(X = 4) = \binom{5}{4} \times (0,4)^4 \times (0,6)^1 = 5 \times 0,4^4 \times 0,6^1 \approx 0,0768$

- Pour calculer $p(X = 0)$, il suffit de réaliser qu'il n'y a qu'un seul chemin dans l'arbre ne comportant aucune branche donnant un jeton rouge : c'est le chemin ne donnant que des jetons bleus (avec $0,6$ sur chacune des 5 branches de ce chemin). On a donc $p(X = 0) = (0,6)^5 \approx 0,0778$.

- Pour calculer $p(X = 5)$, il suffit de réaliser qu'il n'y a qu'un seul chemin dans l'arbre comportant 5 branches donnant un jeton rouge : c'est le chemin ne donnant que des jetons rouges (avec $0,4$ sur chacune des 5 branches de ce chemin). On a donc $p(X = 5) = (0,4)^5 \approx 0,0102$.

©Pascal Brachet (CC BY NC SA)

6. Loi binomiale

a) Schéma de Bernoulli

Définition

On appelle **schéma de Bernoulli** toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Exemple(s)

- Lancer 5 fois de suite un dé en ne s'intéressant qu'au fait d'obtenir un « 6 » ou non est un schéma de Bernoulli.
- Tirer 4 fois une carte **avec remise** en ne s'intéressant qu'au fait d'obtenir un « as » ou non est un schéma de Bernoulli.
- Tirer 4 fois une carte **sans remise** en ne s'intéressant qu'au fait d'obtenir un « as » ou non n'est pas un schéma de Bernoulli : les épreuves ne sont pas indépendantes.
- Tirer 4 fois une carte **avec remise** en s'intéressant au fait d'obtenir un « as », une « dame » ou ni l'un ni l'autre n'est pas un schéma de Bernoulli : les épreuves sont indépendantes mais ce ne sont pas des épreuves de Bernoulli (il y 3 types d'issues possibles et pas 2 uniquement pour chaque tirage)

©Pascal Brachet (CC BY NC SA)

6. Loi binomiale

b) Coefficients binomiaux

Définition

Dans l'arbre pondéré qui correspond à un schéma de Bernoulli consistant à répéter n fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « S (succès) ; $\overline{S}$ (échec) », le nombre de chemins où figure exactement k fois un succès est noté $\binom{n}{k}$ et est appelé **coefficient binomial** (oralement, on lit « k parmi n »).

Propriété(s)

Pour tout entier $n \geqslant 1$:

- $\binom{n}{0} = 1$ *(un seul chemin avec 0 succès) et* $\binom{n}{n} = 1$ *(un seul chemin avec que des succès)*
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ *(pour $0 \leqslant k \leqslant n$; k succès équivaut à $(n-k)$ échecs)*
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$ *(pour $1 \leqslant k \leqslant n$; « Règle de Pascal »)*

Remarque(s)

Obtention du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ à la calculatrice :

CASIO : n `OPTN` `PROB` `nCr` k ; TI : n `MATH` `PROB` `3:Combinaison` k

6. Loi binomiale

Définition

Si on répète n fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « S (probabilité p) ; $\overline{S}$ (probabilité $1-p$) » et si on note X le nombre de fois où S est réalisé (« nombre de succès ») alors on dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p.

Propriété(s)

Si X sui la loi binomiale de paramètres n et p :

- $p\,(X=0) = p\,(\text{« aucun succès »}) = (1-p)^n$
- $p\,(X=n) = p\,(\text{« que des succès »}) = p^n$
- $p\,(X \geqslant 1) = p\,(\text{« au moins un succès »}) = 1 - p\,(\text{« aucun succès »})$
- $p\,(X=k) = p\,(\text{« exactement } k \text{ succès »}) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$
- *L'espérance de X est $E(X) = np$*
  (nombre moyen de succès que l'on peut espérer en répétant le schéma de Bernoulli un grand nombre de fois)
- *La variance de X est $V(x) = np(1-p)$*
- *L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$*

xm1math.net

6. Loi binomiale

Exemple(s)

Un QCM est composé de 4 questions offrant chacune 3 réponses possibles dont une seule est exacte. Un candidat répond au hasard et on note X le nombre total de bonnes réponses qu'il obtient.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que le candidat n'obtienne aucune bonne réponse.

3. Calculer la probabilité que le candidat obtienne que des bonnes réponses.

4. Calculer la probabilité que le candidat obtienne qu'une seule bonne réponse.

5. Calculer la probabilité que le candidat obtienne exactement 2 bonnes réponses.

6. Calculer la probabilité que le candidat obtienne exactement 3 bonnes réponses.

7. Calculer la probabilité que le candidat obtienne au moins une bonne réponse.

8. Déterminer le nombre moyen de bonnes réponses que peut espérer obtenir le candidat.

Réponses :

1. L'expérience revient à répéter 4 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « Bonne réponse (probabilité $\frac{1}{3}$) ; Mauvaise réponse (probabilité $\frac{2}{3}$) ». Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{3}$.

2. $p\left(X = 0\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

3. $p\left(X = 4\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^4$

4. $p\left(X = 1\right) = \binom{4}{1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$

5. $p\left(X = 2\right) = \binom{4}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$

6. $p\left(X = 3\right) = \binom{4}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1$

7. $p\left(\text{au moins 1 bonne réponse}\right) =$
$1 - p\left(\text{aucune bonne réponse}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4$

8. Cela correspond à l'espérance de X qui est égale à $np = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$

xm1math.net

6. Loi binomiale

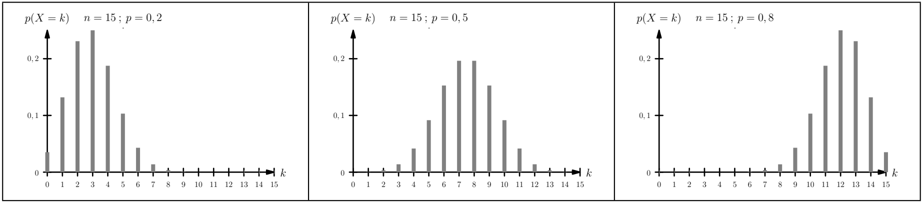
Représentation graphique d'une loi binomiale

Principe

Pour chaque nombre de succès en abscisse, on trace un bâton dont la hauteur est proportionnelle à la probabilité d'obtenir ce nombre de succès.

Exemple(s)

Avec la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,2$; $0,5$ et $0,8$:



7. Loi géométrique

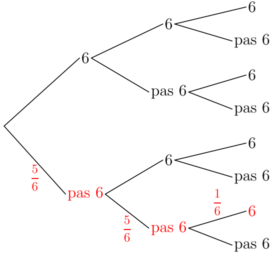
Définition

Si on répète de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du « succès » est p et si on note X **le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès**, on dit que X suit la loi géométrique de paramètre p.

Exemple(s)

Si on lance un dé à 6 faces jusqu'à ce que le « 6 » apparaisse pour la première fois et si on note x le nombre de lancers nécessaires pour cela, X suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{6}$.

• Calculer alors $p(X = 3)$ revient à déterminer la probabilité qu'il faille 3 lancers pour avoir pour la première fois un « 6 ». Seule le chemin en rouge dans l'arbre ci-dessous correspond :



On a donc $p(X = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$ (il faut avoir d'abord 2 fois « pas 6 », puis un « 6 »)

7. Loi géométrique

- De même la probabilité qu'il faille 4 lancers pour avoir pour la première fois un « 6 » est $p(X=4) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6}$ (il faut avoir d'abord 3 fois « pas 6 », puis un « 6 »)

- La probabilité qu'il faille plus de 4 lancers pour obtenir pour la première fois un « 6 » est $p(X > 4)$ que l'on peut calculer en passant par l'événement contraire :

$$\begin{aligned}
p(X=4) &= 1 - [p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4)] \\
&= 1 - \left[\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6}\right] \\
&= 1 - \frac{1}{6}\left[1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3\right] \\
&= 1 - \frac{1}{6}\left[\frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4}{1 - \frac{5}{6}}\right] \quad \text{car } 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\
&= 1 - \frac{1}{6}\left[\frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4}{\frac{1}{6}}\right] \\
&= 1 - \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4\right] \\
&= \left(\frac{5}{6}\right)^4
\end{aligned}$$

©Pascal Brachet (CC BY NC SA)

7. Loi géométrique

Propriété(s)

Si X suit la loi géométrique de paramètre p :

- $p\,(X = k) = p\,(1 - p)^{k-1}$ *(probabilité qu'il faille k répétitions pour obtenir le premier succès)*
- $p\,(X > k) = (1 - p)^{k}$ *(probabilité qu'il faille plus de k répétitions pour obtenir le premier succès)*
- *La probabilité d'attendre plus de k répétitions pour obtenir un premier succès est la même qu'on parte de la 1re épreuve ou de n'importe quelle autre. (La loi géométrique est dite « loi sans mémoire »)*
- *L'espérance de X est égale à $\frac{1}{p}$ (nombre moyen de répétitions nécessaires pour obtenir le premier succès)*

xm1math.net

Fin du chapitre

xm1math.net