Fonction logarithme népérien

https://www.xm1math.net

1. Lien avec la fonction exponentielle

Rappel

$\ln b = a \Leftrightarrow b = \mathrm{e}^{a}$

Conséquences

- $\ln x$ n'existe que si $x > 0$
- $\ln 1 = 0$
- $\ln \mathrm{e} = 1$
- $\ln \left(\mathrm{e}^{x}\right) = x$
- $\mathrm{e}^{\ln x} = x$
  (on dit que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont des fonctions réciproques)

Exemple(s)

- $\ln \left(\mathrm{e}^{2}\right) = 2$
- $\ln \left(\mathrm{e}^{-0,7x}\right) = -0,7x$

2. Propriétés algébriques

a) Relation fondamentale

Pour tous réels a et b strictement positifs :
$\mathrm{e}^{\ln(ab)} = ab$ et $\mathrm{e}^{\ln a + \ln b} = \mathrm{e}^{\ln a} \times \mathrm{e}^{\ln b} = ab$.
On a donc, $\mathrm{e}^{\ln(ab)} = \mathrm{e}^{\ln a + \ln b}$. Ce qui équivaut à dire que $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Propriété(s)

Pour tous réels a et b strictement positifs , $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Exemple(s)

- $\ln 2 + \ln 3 = \ln(2 \times 3) = \ln 6$
- $\ln 2 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(2 \times \frac{1}{2}\right) = \ln 1 = 0$
- $\ln\left(3^2\right) = \ln(3 \times 3) = \ln 3 + \ln 3 = 2\ln 3$

xm1math.net

2. Propriétés algébriques

b) Conséquences

Pour tous réels a et b strictement positifs :

- $\ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0$. Donc, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- Pour tout entier $n \geqslant 2$, $\ln(a^n) = \ln\underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{n \text{ fois}} = \underbrace{\ln a + \ln a + \cdots + \ln a}_{n \text{ fois}} = n \ln a$
- $\ln(a) = \ln\left((\sqrt{a})^2\right) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right)$

Propriété(s)

Pour tous réels a et b strictement positifs :

- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- *Pour tout entier n,* $\ln(a^n) = n\ln a$
- $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$

xm1math.net

2. Propriétés algébriques

Exemple(s)

- $\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3$
- $\ln(25) = \ln\left(5^2\right) = 2\ln 5$
- $\ln\left(\frac{9}{2}\right) = \ln 9 - \ln 2 = \ln\left(3^2\right) - \ln 2 = 2\ln 3 - \ln 2$

Conséquences

Pour tout $x > 0$:

- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$
- $\ln\left(x^2\right) = 2\ln x$
- $\ln\left(x^3\right) = 3\ln x$
- $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\ln\left(x^2\right) = -2\ln x$

xm1math.net

3. La fonction logarithme népérien

Elle n'est définie que sur $]0\,;\,+\infty[$.

a) Limites

Propriété(s)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty \qquad ; \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$$

b) Dérivée

Pour tout $x>0$, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$ donc $\left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)' = 1$. Mais $\mathrm{e}^{\ln x}$ est aussi de la forme e^{u} dont la dérivée est $u'\mathrm{e}^{u}$. On a donc aussi, $\left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)' = (\ln x)' \times \mathrm{e}^{\ln x} = (\ln x)' \times x$.
On en déduit que $(\ln x)' \times x = 1$ et que :

Propriété(s)

La fonction $\ln$ *est dérivable sur* $]0\,;\,+\infty[$ *et* $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

3. La fonction logarithme népérien

c) Sens de variation

Pour tout $x > 0$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} > 0$. La fonction ln est donc strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$\ln x$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

d) Convexité

Pour tout $x > 0$, $(\ln x)'' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$.

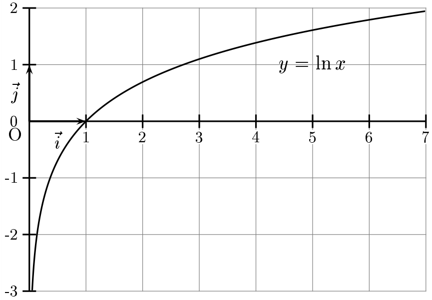
La fonction ln est concave sur $]0\,;\,+\infty[$.

e) Signe de $\ln x$

Vu que la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ et que $\ln 1 = 0$:

Propriété(s)

- $\ln x$ *est strictement positif si* $x > 1$ *;*
- $\ln x$ *est strictement négatif si* $0 < x < 1$



4. Équations et inéquations logarithmiques

▶ Rappel : Une équation ou une inéquation avec des logarithmes n'existe que si tout ce qu'il y a dans les logarithmes est strictement positif.

Propriété(s)

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$

Exemple(s)

1. $\ln(2x) = \ln 4$. Condition d'existence : $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$
   Dans ces conditions, $\ln(2x) = \ln 4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$. $S = \{2\}$
2. $\ln(x-1) = \ln(2x)$. Condition d'existence : $x - 1 > 0$ et $2x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $x > 0 \Leftrightarrow x > 1$
   Dans ces conditions, $\ln(x-1) = \ln(2x) \Leftrightarrow x - 1 = 2x \Leftrightarrow -1 = 2x - x \Leftrightarrow x = -1$
   qui ne vérifie pas la condition d'existence. $S = \varnothing$
3. $\ln x + \ln(x-1) = \ln 6$. Condition d'existence : $x > 0$ et $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $x > 1 \Leftrightarrow x > 1$
   Dans ces conditions, $\ln x + \ln(x-1) = \ln 6 \Leftrightarrow \ln(x(x-1)) = \ln 6 \Leftrightarrow x(x-1) = 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$
   $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$; $x_1 = \frac{-(-1)-5}{2} = -2$ et $x_1 = \frac{-(-1)+5}{2} = 3$. Seul x_2 vérifie la condition d'existence. $S = \{3\}$
4. $\ln x = 3$. Condition d'existence : $x > 0$
   Dans ces conditions, $\ln x = 3 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^3$. $S = \left\{\mathrm{e}^3\right\}$
5. $3\ln x - 6 = 0$. Condition d'existence : $x > 0$
   Dans ces conditions, $3\ln x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3\ln x = 6 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^2$. $S = \left\{\mathrm{e}^2\right\}$

4. Équations et inéquations logarithmiques

Propriété(s)

- $\ln a \leqslant \ln b \Leftrightarrow a \leqslant b$
- $\ln x \leqslant a \Leftrightarrow x \leqslant e^a$
- $\ln x \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant e^a$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
- $\ln x < a \Leftrightarrow x < e^a$
- $\ln x > a \Leftrightarrow x > e^a$

Exemple(s)

1. $\ln(2x) \leqslant \ln 4$. Condition d'existence : $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$
   Dans ces conditions, $\ln(2x) \leqslant \ln 4 \Leftrightarrow 2x \leqslant 4 \Leftrightarrow x \leqslant 2$. Avec la condition d'existence, cela donne $S =]0\,;\,2]$
2. $\ln(4-3x) > \ln x$. Condition d'existence : $4 - 3x > 0$ et $x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{4}{3}$
   Dans ces conditions, $\ln(4-3x) > \ln x \Leftrightarrow 4 - 3x > x \Leftrightarrow 4 > 4x \Leftrightarrow x < 1$. Avec la condition d'existence, cela donne $S =]0\,;\,1[$
3. $\ln x \geqslant 2$. Condition d'existence : $x > 0$
   Dans ces conditions, $\ln x \geqslant 2 \Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{e}^2$. Avec la condition d'existence, cela donne $S = \left[\mathrm{e}^2\,;\,+\infty\right[$
4. $9 - 3\ln x \geqslant 0$. Condition d'existence : $x > 0$
   Dans ces conditions, $9 - 3\ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow 9 \geqslant 3\ln x \Leftrightarrow 3 \geqslant \ln x \Leftrightarrow x \leqslant \mathrm{e}^3$. Avec la condition d'existence, cela donne $S = \left]0\,;\,\mathrm{e}^3\right]$

xm1math.net

5. Fonctions de la forme $\ln u$

a) Dérivée de $\ln u$

Propriété(s)

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors $\ln u$ est aussi dérivable sur I et on a $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

▶ *Exemples :*

- Si $f(x) = \ln(x^2+1)$ alors $f'(x) = \dfrac{\overbrace{2x}^{\text{dérivée de } x^2+1}}{x^2+1}$.
- Si $f(x) = \ln(3x+5)$ alors $f'(x) = \dfrac{\overbrace{3}^{\text{dérivée de } 3x+5}}{3x+5}$.

b) Limites de $\ln u$

▶ *Exemples :*

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$.
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

6. Détermination du plus petit entier n tel que $q^n \geqslant a$ ou $q^n \leqslant a$

Principe : on isole le q^n (si ce n'est pas déjà fait) et on « passe l'inégalité au logarithme » en utilisant ensuite que $\ln(q^n) = n \ln q$.

Exemple(s)

- Détermination du plus petit entier n tel que $2^n \geqslant 2500$:

  $2^n \geqslant 2500 \Leftrightarrow \ln(2^n) \geqslant \ln(2500) \Leftrightarrow n\ln(2) \geqslant \ln(2500) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(2500)}{\ln(2)}$

  ($\ln(2) > 0$, on ne change pas le sens de l'inégalité en divisant)

  Or, $\dfrac{\ln(2500)}{\ln(2)} \approx 11,29$. Le plus petit entier qui convient est $n = 12$.

- Détermination du plus petit entier n tel que $0,85^n \leqslant 0,01$:

  $0,85^n \leqslant 0,01 \Leftrightarrow \ln(0,85^n) \leqslant \ln(0,01) \Leftrightarrow n\ln(0,85) \leqslant \ln(0,01) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,85)}$

  ($\ln(0,85) < 0$, on change le sens de l'inégalité en divisant)

  Or, $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,85)} \approx 28,34$. Le plus petit entier qui convient est $n = 29$.

xm1math.net

7. Logarithme décimal

Définition

Pour tout réel $x > 0$, on appelle **logarithme décimal** de x, le réel noté $\log x$ défini par $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Propriété(s)

Pour tout entier (positif ou négatif) n, on a $\log\left(10^n\right) = n$

En effet, $\log\left(10^n\right) = \dfrac{\ln\left(10^n\right)}{\ln 10} = \dfrac{n \ln 10}{\ln 10} = n$

Exemple(s)

- $\log 10 = 1$
- $\log 100 = 2$
- $\log 1000 = 3$
- $\log 0,1 = -1$
- $\log 0,01 = -2$
- $\log 0,001 = -3$

▶ **Conséquence :** dire que $\log x$ est égal à un entier n équivaut à dire que x est égal à 10^n.

xm1math.net

Fin du chapitre