

Équations différentielles

©Pascal Brachet (CC BY NC SA)

<https://www.xmlmath.net>

1. Équations différentielles de la forme $y' + ay = 0$

Exemple(s)

- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-2x}$.
Pour tout x , on a $f'(x) + 2f(x) = -2e^{-2x} + 2e^{-2x} = 0$.
On dit que la fonction f est une solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ (y représente la fonction et y' sa dérivée).
- Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 0$, c'est déterminer l'ensemble de **toutes** les fonctions f telles qu'on ait, pour tout x , $f'(x) + 2f(x) = 0$ (la fonction f donnée ci-dessus n'est pas la seule solution : f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3e^{-2x}$ est aussi une solution)

Théorème

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ ($a \neq 0$) sont les fonctions f de la forme $f(x) = k e^{-ax}$.

Méthode pratique :

- bien mettre l'équation différentielle sous la forme $y' + ay = 0$;
- identifier la valeur de a et conclure sur la forme des solutions.

1. Équations différentielles de la forme $y' + ay = 0$

Exemple(s)

- Résolution de l'équation différentielle $y' + 3y = 0$:
On a bien la forme $y' + ay = 0$ avec $a = 3$.

Les solutions sont définies par $f(x) = k e^{-ax} = k e^{-3x}$.

- Résolution de l'équation différentielle $2y' - 3y = 0$:

$$2y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{3}{2}y = 0 \text{ (en divisant toute l'équation par 2)}$$

On a bien maintenant la forme $y' + ay = 0$ avec $a = -\frac{3}{2}$.

Les solutions sont définies par $f(x) = k e^{-ax} = k e^{\frac{3}{2}x}$.

- Détermination de la solution de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$ telle que $f(0) = 4$:

- On commence par déterminer la forme de **toutes** les solutions :

On a bien la forme $y' + ay = 0$ avec $a = 5$.

Les solutions sont définies par $f(x) = k e^{-ax} = k e^{-5x}$.

- On cherche maintenant la seule solution vérifiant la condition donnée $f(0) = 4$:

On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = k e^{-5x}$, donc on doit avoir $f(0) = k e^0 = k$.
Pour avoir $f(0) = 4$, il faut donc prendre $k = 4$.

La solution cherchée est donc définie par $f(x) = 4 e^{-5x}$

2. Équations différentielles de la forme $y' + ay = b$

Théorème

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) sont les fonctions f de la forme $f(x) = k e^{-ax} + \frac{b}{a}$.

Méthode pratique :

- bien mettre l'équation différentielle sous la forme $y' + ay = b$;
- identifier les valeurs de a et b et conclure sur la forme des solutions.

Exemple(s)

- Résolution de l'équation différentielle $y' + 4y = 8$:

On a bien la forme $y' + ay = b$ avec $a = 4$ et $b = 8$.

Les solutions sont définies par $f(x) = k e^{-ax} + \frac{b}{a} = k e^{-4x} + \frac{8}{4} = k e^{-4x} + 2$.

2. Équations différentielles de la forme $y' + ay = b$

Exemple(s)

- Résolution de l'équation différentielle $2y' - 4y + 5 = 0$:

$$2y' - 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow y' - 2y + \frac{5}{2} = 0 \text{ (en divisant toute l'équation par 2)}$$

$$\Leftrightarrow y' - 2y = -\frac{5}{2} \text{ (en faisant passer le } \frac{5}{2} \text{ dans le second membre).}$$

$$\text{On a bien maintenant la forme } y' + ay = b \text{ avec } a = -2 \text{ et } b = -\frac{5}{2}.$$

$$\text{Les solutions sont définies par } f(x) = k e^{-ax} + \frac{b}{a} = k e^{2x} + \frac{-\frac{5}{2}}{-2} = k e^{2x} + \frac{5}{4}.$$

- Détermination de la solution de l'équation différentielle $y' + y = 7$ telle que $f(0) = 1$:

- On commence par déterminer la forme de **toutes** les solutions :
- On a bien la forme $y' + ay = b$ avec $a = 1$ et $b = 7$.

Les solutions sont définies par $f(x) = k e^{-ax} + \frac{b}{a} = k e^{-x} + 7$.

- On cherche maintenant la seule solution vérifiant la condition donnée $f(0) = 1$:

On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = k e^{-x} + 7$, donc on doit avoir $f(0) = k e^0 + 7 = k + 7$.

Pour avoir $f(0) = 1$, il faut donc $k + 7 = 1 \Leftrightarrow k = -6$.

La solution cherchée est donc définie par $f(x) = -6 e^{-x} + 7$

Fin du chapitre