Équations différentielles

https://www.xm1math.net

1. Équations différentielles de la forme $y' + ay = 0$

Exemple(s)

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$.
  Pour tout x, on a $f'(x) + 2f(x) = -2\mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{-2x} = 0$.
  On dit que la fonction f est une solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ (y représente la fonction et y' sa dérivée).
- Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 0$, c'est déterminer l'ensemble de **toutes** les fonctions f telles qu'on ait, pour tout x, $f'(x) + 2f(x) = 0$ (la fonction f donnée ci-dessus n'est pas la seule solution : f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x}$ est aussi une solution)

Théorème

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ $(a \neq 0)$ sont les fonctions f de la forme $f(x) = k\, e^{-ax}$.

Méthode pratique :

- bien mettre l'équation différentielle sous la forme $y' + ay = 0$;
- identifier la valeur de a et conclure sur la forme des solutions.

1. Équations différentielles de la forme $y' + ay = 0$

Exemple(s)

- Résolution de l'équation différentielle $y' + 3y = 0$:
  On a bien la forme $y' + ay = 0$ avec $a = 3$.
  Les solutions sont définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} = k\,\mathrm{e}^{-3x}$.
- Résolution de l'équation différentielle $2y' - 3y = 0$:
  $2y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' - \dfrac{3}{2}y = 0$ (en divisant toute l'équation par 2)
  On a bien maintenant la forme $y' + ay = 0$ avec $a = -\dfrac{3}{2}$.
  Les solutions sont définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} = k\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}$.
- Détermination de **la** solution de l'équation différentielle $y' + 5y = 0$ telle que $f(0) = 4$:
  - On commence par déterminer la forme de **toutes** les solutions :
    On a bien la forme $y' + ay = 0$ avec $a = 5$.
    Les solutions sont définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} = k\,\mathrm{e}^{-5x}$.
  - On cherche maintenant la seule solution vérifiant la condition donnée $f(0) = 4$:
    On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-5x}$, donc on doit avoir $f(0) = k\,\mathrm{e}^{0} = k$.
    Pour avoir $f(0) = 4$, il faut donc prendre $k = 4$.
    La solution cherchée est donc définie par $f(x) = 4\,\mathrm{e}^{-5x}$

xm1math.net

2. Équations différentielles de la forme $y' + ay = b$

Théorème

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) sont les fonctions f de la forme $f(x) = k\,e^{-ax} + \dfrac{b}{a}$.

Méthode pratique :

- bien mettre l'équation différentielle sous la forme $y' + ay = b$;
- identifier les valeurs de a et b et conclure sur la forme des solutions.

Exemple(s)

- Résolution de l'équation différentielle $y' + 4y = 8$:
  On a bien la forme $y' + ay = b$ avec $a = 4$ et $b = 8$.
  Les solutions sont définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a} = k\,\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{8}{4} = k\,\mathrm{e}^{-4x} + 2$.

2. Équations différentielles de la forme $y' + ay = b$

Exemple(s)

- Résolution de l'équation différentielle $2y' - 4y + 5 = 0$:
  $2y' - 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow y' - 2y + \dfrac{5}{2} = 0$ (en divisant toute l'équation par 2)
  $\Leftrightarrow y' - 2y = -\dfrac{5}{2}$ (en faisant passer le $\dfrac{5}{2}$ dans le second membre).
  On a bien maintenant la forme $y' + ay = b$ avec $a = -2$ et $b = -\dfrac{5}{2}$.
  Les solutions sont définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a} = k\,\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{-\frac{5}{2}}{-2} = k\,\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{5}{4}$.
- Détermination de **la** solution de l'équation différentielle $y' + y = 7$ telle que $f(0) = 1$:
  - On commence par déterminer la forme de **toutes** les solutions :
    On a bien la forme $y' + ay = b$ avec $a = 1$ et $b = 7$.
    Les solutions sont définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a} = k\,\mathrm{e}^{-x} + 7$.
  - On cherche maintenant la seule solution vérifiant la condition donnée $f(0) = 1$:
    On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-x} + 7$, donc on doit avoir
    $f(0) = k\,\mathrm{e}^{0} + 7 = k + 7$.
    Pour avoir $f(0) = 1$, il faut donc $k + 7 = 1 \Leftrightarrow k = -6$.
    La solution cherchée est donc définie par $f(x) = -6\,\mathrm{e}^{-x} + 7$

xm1math.net

Fin du chapitre