Complément sur les suites

▶ Exercice n°1
a) $+\infty$ car $1{,}7 > 1$
b) 0 car $0 < 0{,}85 < 1$
c) $0 < 0{,}6 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}6)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times (0{,}6)^n = 0$
d) $1{,}7 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \times (1{,}7)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -4 \times (1{,}7)^n = -\infty$
e) $1{,}8 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1{,}8)^n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 \times (1{,}8)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 + 5 \times (1{,}8)^n = +\infty$
f) $0 < 0{,}75 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}75)^n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -2 \times (0{,}75)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 10 - 2 \times (0{,}75)^n = 10$
g) $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n = -\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-2n} = 0$
h) $0 < \frac{3}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n + n^2 = +\infty$

▶ Exercice n°2
1. $\frac{3}{100} \times 8000 = 240$
2. (U_n) est arithmétique de raison $r = 240$.
3. $U_n = U_0 + nr = 8000 + 240n$.
4. $U_{15} = 8000 + 240 \times 15 = 11600$

▶ Exercice n°3
1. capital d'une année=capital de l'année précédente+intérêts.
   On a donc $U_{n+1} = U_n + \frac{3}{100} \times U_n = \left(1 + \frac{3}{100}\right) U_n = 1{,}03U_n$
2. (U_n) est géométrique de raison $q = 1{,}03$.
3. $U_n = q^n \times U_0 = 1{,}03^n \times 8000$.
4. $U_8 = 1{,}03^8 \times 8000 = 10134{,}2$
5. Cela revient à déterminer le plus petit entier n tel que $U_n \geqslant 16000 \Leftrightarrow 1{,}03^n \geqslant 2$ $\Leftrightarrow \ln(1{,}03^n) \geqslant \ln 2 \Leftrightarrow n \underbrace{\ln(1{,}03)}_{+} \geqslant \ln 2 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln 2}{\ln(1{,}03)} \approx 23{,}5$.
   Le plus petit entier qui convient est $n = 24$. Il faut attendre 24 ans.

▶ Exercice n°4
Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison $q = 3$.

1. $U_2 = q^2 \times U_0 = 45$; $U_5 = q^5 \times U_0 = 1215$.
2. $U_n = q^n \times U_0 = 3^n \times 5$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ car $3 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$
4. $U_0 + U_1 + \cdots + U_8 = U_0 \times \dfrac{1-q^9}{1-q} = 49205$

▶ Exercice n°5
1. Diminuer de 1,2% revient à multiplier par $1 - \dfrac{1{,}2}{100} = 0{,}988$. On passe donc d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par 0,988. (M_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}988$.
2. $M_n = q^n \times M_0 = 0{,}988^n \times 10$.
3. Recherche du plus petit entier n tel que $M_n \leqslant 5$: $0{,}988^n \times 10 \leqslant 5 \Leftrightarrow 0{,}988^n \leqslant 0{,}5 \Leftrightarrow \ln(0{,}988^n) \leqslant \ln(0{,}5) \Leftrightarrow n \underbrace{\ln(0{,}988)}_{-} \leqslant (0{,}5) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}988)}$.

   Il faudra attendre 58 siècles.

▶ Exercice n°6
1. On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par 0,5. (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$.
2. a) $U_n = q^n \times U_0 = 0{,}5^n \times 5$.
   b) 10500 ans correspond à 7 périodes de désintégration et $U_7 = 0{,}5^7 \times 5 \approx 0{,}04$
   c) $0{,}5^n \times 5 \leqslant 0{,}005 \Leftrightarrow 0{,}5^n \leqslant 0{,}001 \Leftrightarrow \ln(0{,}5^n) \leqslant \ln(0{,}001)$
   $\Leftrightarrow n \underbrace{\ln(0{,}5)}_{-} \leqslant \ln(0{,}001) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}5)}$. Le plus petit entier qui convient est 7 et 7 périodes correspondent à 10500 ans.

▶ Exercice n°7
1. Diminuer de 20% revient à multiplier par $1 - \dfrac{20}{100} = 0{,}8$. (I_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$.
2. $I_n = q^n \times U_0 = 0{,}8^n \times 50$.
3. $I_4 = 0{,}8^4 \times 50 = 20{,}48$

4. a) **Méthode 1 : avec un script python**.

```
n=0
I=50
while I>1 :
  I=0.8*I
  n=n+1
print(n)
```

b) **Méthode 2 : en résolvant une inéquation**.
$0{,}8^n \times 50 \leqslant 1 \Leftrightarrow 0{,}8^n \leqslant 0{,}02 \Leftrightarrow \ln(0{,}8^n) \leqslant \ln(0{,}02)$
$\Leftrightarrow n\underbrace{\ln(0{,}8)}_{-} \leqslant \ln(0{,}02) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}8)}$.
Le plus petit entier qui convient est 18.

▶ Exercice n°8

1. On répète n fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « As » $(p = \frac{1}{8})$, « pas As » $(1 - p = \frac{7}{8})$. X suit donc la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{8}$.
2. a) $p_n = \left(\frac{7}{8}\right)^n$.

b) Pour tout n, $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = \dfrac{\left(\frac{7}{8}\right)^{n+1}}{\left(\frac{7}{8}\right)^n} = \frac{7}{8}$.
(p_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{7}{8}$.

c) $p_0 > 0$ et $0 < \frac{7}{8} < 1$ donc (p_n) est décroissante.
$0 < \frac{7}{8} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$

3. a) « obtenir au moins un as » est le contraire de « n'obtenir aucun as ».
$q_n = 1 - p_n = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^n$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - p_n = 1$.

c) On cherche le plus petit entier n tel que $1 - \left(\frac{7}{8}\right)^n > 0{,}99 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{8}\right)^n < 0{,}01$
$\Leftrightarrow \ln\left[\left(\frac{7}{8}\right)^n\right] < \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n\underbrace{\ln\left(\frac{7}{8}\right)}_{-} < \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{7}{8}\right)} \approx 34{,}5$.
Il faut tirer au moins 35 cartes.

▶ Exercice n°9

1. 10
2. `2*B2-5` ou `2*$B2-5`

▶ Exercice n°10

1. $U_{n+1} = 0{,}9U_n + 2$; $U_0 = 25$.
2. $U_1 = 0{,}9U_0 + 2 = 24{,}5$; $U_2 = 0{,}9U_1 + 2 = 24{,}05$.
3. a) $V_0 = U_0 - 20 = 5$; $V_1 = U_1 - 20 = 4{,}5$; $V_2 = U_2 - 20 = 4{,}05$.

b) Pour tout n, $V_n \neq 0$ et $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1} - 20}{U_n - 20} = \dfrac{0{,}9U_n + 2 - 20}{U_n - 20} = \dfrac{0{,}9U_n - 18}{U_n - 20}$
$= \dfrac{0{,}9\,(U_n - 20)}{U_n - 20} = 0{,}9$. Donc (V_n) est géométrique de raison $q = 0{,}9$.

c) $V_n = q^n \times V_0 = 0{,}9^n \times 5$.
$V_n = U_n - 20$ donc $U_n = V_n + 20 = 0{,}9^n \times 5 + 20$.

4. $U_{10} = 0{,}9^{10} \times 5 + 20 \approx 21{,}743$.
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$ car $0 < 0{,}9 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n \times 5 = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 20$
6. $V_0 + V_1 + \cdots + V_9 = V_0 \times \dfrac{1 - 0{,}9^{10}}{1 - 0{,}9} \approx 32{,}57$.
$U_0 + U_1 + \cdots + U_9 = V_0 + 20 + V_1 + 20 + \cdots + V_9 + 20 = V_0 + V_1 + \cdots + V_9 + 10 \times 20 \approx 232{,}57$

▶ Exercice n°11

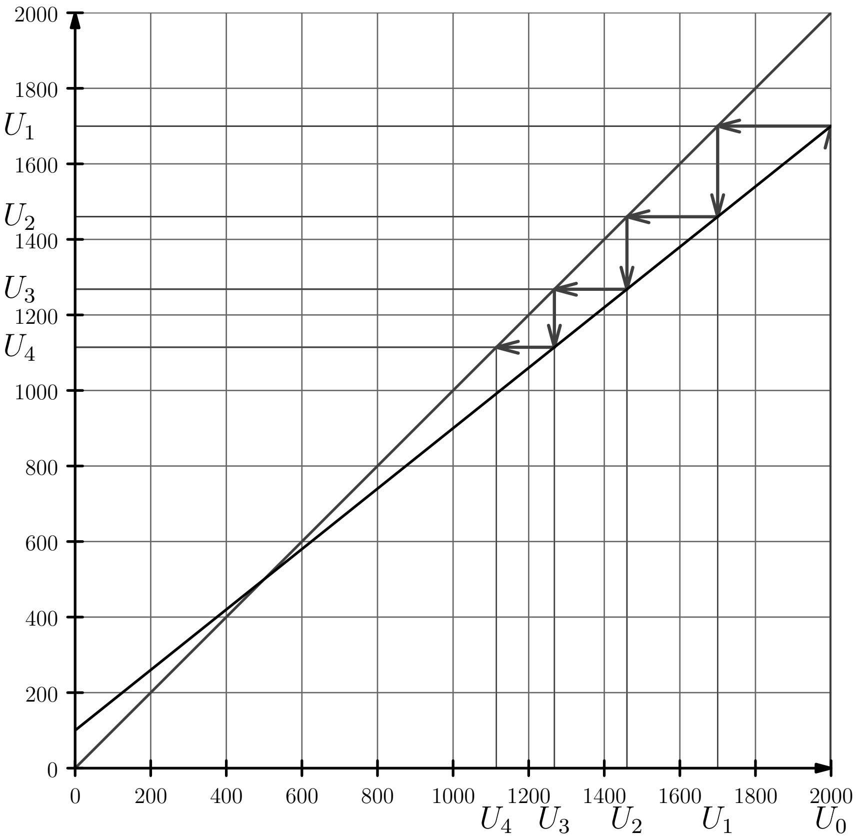
1. Diminuer de 2 % revient à multiplier par 0,98 et on ajoute les 5 litres d'eau.
2. a) Pour tout n, $V_n \neq 0$ et $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1} - 250}{U_n - 250} = \dfrac{0{,}98U_n + 5 - 250}{U_n - 250}$
$= \dfrac{0{,}98U_n - 245}{U_n - 20} = \dfrac{0{,}98\,(U_n - 250)}{U_n - 250} = 0{,}98$. Donc (V_n) est géométrique de raison $q = 0{,}98$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 250 = 30$.

b) $V_n = q^n \times V_0 = 0{,}98^n \times 30$.
$V_n = U_n - 250$ donc $U_n = V_n + 250 = 0{,}98^n \times 30 + 250$.

3. Pour tout n, $0{,}98^n \times 30 > 0$ et donc $U_n > 250$. La préconisation est respectée.

▸ **Exercice n°12**

1. Diminuer de 20% revient à multiplier par 0,8 et on ajoute les 100 embauches.
2.



3. (V_n) géométrique de raison 0,8 $\Leftrightarrow V_{n+1} = 0{,}8V_n \Leftrightarrow U_{n+1} - a = 0{,}8\,(U_n - a)$
$\Leftrightarrow 0{,}8 \times U_n + 100 - a = 0{,}8 \times U_n - 0{,}8 \times a \Leftrightarrow 100 = 0{,}2 \times a \Leftrightarrow a = \frac{100}{0{,}2} = 500$.
4. $V_n = 0{,}8^n \times V_0 = 0{,}8^n \times 1500$ car $V_0 = U_0 - 500 = 1500$.
$V_n = U_n - 500$ donc $U_n = V_n + 500 = 0{,}8^n \times 1500 + 500$.
5. $U_5 = 0{,}8^5 \times 1500 + 500 \approx 992$.
6. $U_{n+1} - U_n = 0{,}8^{n+1} \times 1500 + 500 - 0{,}8^n \times 1500 - 500$
$= 0{,}8^n \times 1500 \times (0{,}8 - 1) = -300 \times 0{,}8^n$.
7. $U_{n+1} - U_n$ reste toujours négatif, donc (U_n) est décroissante.
8. $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$ car $0 < 0{,}8 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n \times 1500 = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 500$
9. Cherchons le plus petit entier n tel que $0{,}8^n \times 1500 + 500 \leqslant 600$
$\Leftrightarrow 0{,}8^n \times 1500 \leqslant 100 \Leftrightarrow 0{,}8^n \leqslant \frac{100}{1500} \Leftrightarrow \ln(0{,}8^n) \leqslant \ln\left(\frac{100}{1500}\right)$
$\Leftrightarrow n\underbrace{\ln(0{,}8)}_{-} \leqslant \ln\left(\frac{100}{1500}\right) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{100}{1500}\right)}{\ln(0{,}8)} \approx 12{,}1$.
Le plus petit entier qui convient est 13, ce qui correspond à l'année 2033.

▸ **Exercice n°13**

1. $P_2 - P_1 = 0{,}5\,(P_1 - P_0) \Leftrightarrow P_2 - 700\,000 = 100\,000$, donc $P_2 = 800\,000$
$P_3 - P_2 = 0{,}5\,(P_2 - P_1) \Leftrightarrow P_3 - 800\,000 = 50\,000$, donc $P_3 = 850\,000$
2. a) $U_{n+1} = P_{n+1} - P_n = 0{,}5\,(P_{n+1} - P_n) = 0{,}5U_n$. Donc (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $U_0 = P_1 - P_0 = 200\,000$. On en déduit que $U_n = q^n \times U_0 = 200\,000 \times 0{,}5^n$.
b) Pour tout n, $V_{n+1} - V_n = P_{n+2} - 0{,}5P_{n+1} - P_{n+1} + 0{,}5P_n$
$= P_{n+2} - P_{n+1} - 0{,}5P_{n+1} + 0{,}5P_n = 0{,}5\,(P_{n+1} - P_n) - 0{,}5\,(P_{n+1} - P_n) = 0$.
La suite (V_n) est bien constante.
Donc, pour tout n, $V_n = V_0 = P_1 - 0{,}5P_0 = 700\,000 - 250\,000 = 450\,000$
c) $2\,(V_n - U_n) = 2\,(P_{n+1} - 0{,}5P_n - P_{n+1} + P_n) = P_n$.
Donc, $P_n = 2\,(450\,000 - 200\,000 \times 0{,}5^n) = 900\,000 - 400\,000 \times 0{,}5^n$.
d) $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$ car $0 < 0{,}5 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 400\,000 \times 0{,}5^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 900\,000$.

▸ **Exercice n°14**

1. Pour tout n, $V_n \neq 0$ et $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1} - 100A}{U_n - 100A} = \dfrac{1{,}01U_n - A - 100A}{U_n - 100A}$
$= \dfrac{1{,}01U_n - 101A}{U_n - 100A} = \dfrac{1{,}01\,(U_n - 100A)}{U_n - 100A} = 1{,}01$. Donc (V_n) est géométrique de raison $q = 1{,}01$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 100A = 120\,000 - 100A$.
2. $V_n = q^n \times V_0 = 1{,}01^n \times [120\,000 - 100A]$.
$U_n = V_n + 100A = 1{,}01^n \times [120\,000 - 100A] + 100A$
3. $U_{15} = 0 \Leftrightarrow 1{,}01^{15} \times [120\,000 - 100A] + 100A = 0$.
$\Leftrightarrow 1{,}01^{15} \times 120\,000 - 1{,}01^{15} \times 100A + 100A = 0$
$\Leftrightarrow 1{,}01^{15} \times 120\,000 = 100A\left(1{,}01^{15} - 1\right) \Leftrightarrow A = \dfrac{1{,}01^{15} \times 120\,000}{100\,(1{,}01^{15} - 1)} \approx 8654{,}85$
Mensualités $\approx \dfrac{8654{,}85}{12} \approx 721{,}24$.