Primitives et intégration

► Exercice n°1

- *Proposition 1 :* FAUSSE - $F'(3) = f(3) = 4$
- *Proposition 2 :* VRAIE - F est bien croissante sur $]1\,;5\,[$ car $F'(x) = f(x) \geqslant 0$ pour x dans $]1\,;5\,[$
- *Proposition 3 :* FAUSSE - le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2 est égal à $F'(2) = f(2) = 3$ et ne peut être égal à 4 comme proposé.
- *Proposition 4 :* FAUSSE - $F''(x) = f'(x)$. Or f n'est pas croissante sur tout l'intervalle $]1\,;5\,[$ mais uniquement sur $]1\,;3\,[$, donc $f'(x)$ n'est positive que sur $]1\,;3\,[$ et pas sur tout l'intervalle $]1\,;5\,[$.

► Exercice n°2

Une entreprise fabrique x milliers d'objets avec $x \in [0\,;15\,]$.

1. $C'_m(x) = 6x - 36$.

x	0		6		15
$C'_m(x)$		$-$	0	$+$	
$C_m(x)$	750	$\searrow$	642	$\nearrow$	885

Il faut donc fabriquer 6 milliers d'objets pour avoir un coût marginal minimum.

2. C_T est une primitive de C_m sur $[0\,;15\,]$.
On a donc $C_T(x) = 3\times\dfrac{x^3}{3} - 36\times\dfrac{x^2}{2} + 750x + C = x^3 - 18x^2 + 750x + C$ où C est la constante telle que $C_T(0) = 200 \Leftrightarrow 0^3 - 18\times 0^2 + 750\times 0 + C = 200 \Leftrightarrow C = 200$.
C_T est donc définie par $C_T(x) = x^3 - 18x^2 + 750x + 200$.

► Exercice n°3

1. Si $v(t) = d'(t)$ alors on peut dire que la fonction d est une primitive de la fonction v.
2. Mouvement entre 0 et 15 secondes :
   a) Une équation de la droite (AB) est $y = 2x$. Donc, $v(t) = 2t$ pour t compris entre 0 et 15 secondes.
   b) $d(t) = t^2 + C$. Or, $d(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$. On a donc finalement $d(t) = t^2$ pour t compris entre 0 et 15 secondes.
   c) $d(15) = 15^2 = 225$ mètres.
3. Mouvement entre 15 et 70 secondes :
   a) $v(t) = 30$ pour t compris entre 15 et 70 secondes
   Donc, $d(t) = 30t + C$ pour t compris entre 15 et 70 secondes. Or, $d(15) = 225 \Leftrightarrow 30 \times 15 + C = 225 \Leftrightarrow C = -225$. On a donc finalement $d(t) = 30t - 225$ pour t compris entre 15 et 70 secondes.
   b) $d(70) = 30 \times 70 - 225 = 1875$ mètres.
4. Mouvement entre 70 et 90 secondes :
   a) Le coefficient directeur de (CD) est égal à $\dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{0 - 30}{90 - 70} = -1{,}5$.
   (CD) admet donc une équation de la forme $y = -1{,}5x + p$. Or, on doit avoir $y_D = -1{,}5x_D + p \Leftrightarrow 0 = -1{,}5 \times 90 + p \Leftrightarrow p = 135$. Une équation de (CD) est donc $y = -1{,}5x + 135$.
   Ainsi $v(t) = -1{,}5t + 135$ pour t compris entre 70 et 90 secondes.
   b) $d(t) = -1{,}5 \times \dfrac{t^2}{2} + 135t + C = -0{,}75t^2 + 135t + C$. Or, $d(70) = 1875 \Leftrightarrow -0{,}75 \times 70^2 + 135 \times 70 + C = 1875 \Leftrightarrow C = -3900$. On a donc finalement $d(t) = -0{,}75t^2 + 135t - 3900$ pour t compris entre 70 et 90 secondes.
   c) $d(90) = -0{,}75 \times 90^2 + 135 \times 90 - 3900 = 2175$ mètres.

► Exercice n°4

1. $\displaystyle\int_2^3 \left(x^2 + 1\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_2^3 = \frac{22}{3}$
2. $\displaystyle\int_1^2 \left(3x + 1 + \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x = \left[3\frac{x^2}{2} + x + \ln x\right]_1^2 = \frac{11}{2} + \ln 2$
3. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[\sqrt{x}\right]_1^4 = 1$
4. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,(\ln x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$ (forme $U'U$)
5. $\displaystyle\int_{-1}^0 3\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-3\mathrm{e}^{-x}\right]_{-1}^0 = -3 + 3\mathrm{e}$
6. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}\right)\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\ln 2} = \left(2 - \frac{1}{2}\times 4\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$
7. $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 -\frac{1}{2}\left(-2x\mathrm{e}^{-x^2}\right)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{2}$
(utilisation de la forme $U'\mathrm{e}^U$)

▶ Exercice n°5

1. $F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = f(x)$.

2. $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^2 = [x \ln x]_1^2 = 2\ln 2$

▶ Exercice n°6

1. $F'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x} + (-2x-3)\,(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}\,(-2+2x+3) = f(x)$

2. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = \left[(-2x-3)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = -5\mathrm{e}^{-1}+3$

▶ Exercice n°7

1. $\displaystyle P(a) = \int_0^a 0{,}4x\,\mathrm{e}^{-0{,}2x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^a -\left(-0{,}4x\,\mathrm{e}^{-0{,}2x^2}\right)\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-0{,}2x^2}\right]_0^a$
   $= -\mathrm{e}^{-0{,}2a^2}+1$ (utilisation de la forme $U'\mathrm{e}^U$)

2. $P(a) = 0{,}99 \Leftrightarrow -\mathrm{e}^{-0{,}2a^2}+1 = 0{,}99 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}2a^2} = 0{,}01 \Leftrightarrow -0{,}2a^2 = \ln 0{,}01$
   $\Leftrightarrow a^2 = \dfrac{\ln 0{,}01}{-0{,}2} \Leftrightarrow a = \sqrt{-\dfrac{\ln 0{,}01}{0{,}2}} \approx 4{,}8$

▶ Exercice n°8

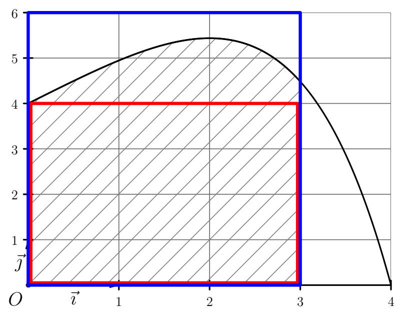
aire $\displaystyle = \int_{-1}^2 -x^3+3x^2\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^4}{4}+x^3\right]_{-1}^2 = (-4+8) - \left(-\frac{1}{4}-1\right) = \frac{21}{4}$ unités d'aire

▶ Exercice n°9

aire $\displaystyle = \int_0^{\ln 3} 4\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 3} 4\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\left(2\mathrm{e}^{2x}\right)\,\mathrm{d}x = \left[4\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\ln 3}$
$\displaystyle = \left(4\times 3 - \frac{1}{2}\times 9\right) - \left(4 - \frac{1}{2}\right) = 4$ unités d'aire

▶ Exercice n°10

$\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à l'aire sous la courbe hachurée ci-dessous. Elle est comprise entre l'aire du rectangle rouge, qui est égale à 3×4, et l'aire du rectangle bleu, qui est égale à 3×6.



On a donc bien $\displaystyle 12 \leqslant \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 18$.

▶ Exercice n°11

aire $\displaystyle = \int_0^1 2-\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ (« intégrale de la plus grande - plus petite »)
$\displaystyle = \int_0^1 2-2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[2x+2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = 2+2\mathrm{e}^{-1}-2 = 2\mathrm{e}^{-1}$ unités d'aire

▶ Exercice n°12

1. Pour tout $x>0$, $f(x)-x = -\dfrac{\ln x}{x}$.
   Si $0<x<1$, $\ln x<0$ donc $-\ln x>0$ et $-\dfrac{\ln x}{x}>0$. C_f est au dessus de D sur $]0\,;1[$.
   Si $x>1$, $\ln x>0$ donc $-\ln x<0$ et $-\dfrac{\ln x}{x}<0$. C_f est en dessous de D sur $]0\,;1[$.

2. A (en unités d'aire) = « intégrale de la plus grande - plus petite »
   $\displaystyle = \int_1^{\mathrm{e}} x - f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\times \ln x\,\mathrm{d}x$ (forme $U'U$)
   $\displaystyle = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$
   A en cm^2 $= \dfrac{1}{2}\times$ (la valeur en cm d'une unité sur l'axe des abscisses) $\times$ (la valeur en cm d'une unité sur l'axe des ordonnées)
   $= \dfrac{1}{2}\times 2\times 2 = 2$

▶ Exercice n°13

valeur moyenne $\displaystyle = \frac{1}{4-1}\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^4 2\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[2\ln x\right]_1^4$
$\displaystyle = \frac{1}{3}\,(2\ln 4 - 0) = \frac{2}{3}\ln 4$

▶ Exercice n°14

vitesse moyenne $= \dfrac{1}{2-1}\displaystyle\int_1^2 v(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^2 25\left(1-\mathrm{e}^{-2t}\right)\,\mathrm{d}t$

$= \displaystyle\int_1^2 25 + 12{,}5\left(-2\mathrm{e}^{-2t}\right)\,\mathrm{d}t = \left[25t + 12{,}5\mathrm{e}^{-2t}\right]_1^2$

$= \left(50 + 12{,}5\mathrm{e}^{-4}\right) - \left(25 + 12{,}5\mathrm{e}^{-2}\right) = 25 + 12{,}5\mathrm{e}^{-4} - 12{,}5\mathrm{e}^{-2} \approx 23{,}5\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

▶ Exercice n°15

1. $f'(t) = 20 - 80 \times \dfrac{1}{t} = \dfrac{20t-80}{t}$.

t	1		4		13
$20t-80$		$-$	0	$+$	
t		$+$		$+$	
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

2. $F'(t) = 20t + 120 - 80\left(1 \times \ln t + t \times \dfrac{1}{t}\right) = 20t + 120 - 80 - 80\ln t = 20t + 40 - 80\ln t = f(t)$

3. valeur moyenne $= \dfrac{1}{13-1}\displaystyle\int_1^{13} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{12}\left[F(t)\right]_1^{13}$
$= \dfrac{1}{12}\left(3250 - 1040\ln 13 - 130\right) = \dfrac{1}{12}\left(3120 - 1040\ln 13\right) \approx 37{,}70$ euros

▶ Exercice n°16

1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - 4\mathrm{e}^{0.5x-3} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{0.5x-3} = 1{,}5 \Leftrightarrow 0{,}5x - 3 = \ln(1{,}5)$
$\Leftrightarrow 0{,}5x = 3 + \ln(1{,}5) \Leftrightarrow x = 6 + 2\ln(1{,}5)$.
2. $f(6) = 6 - 4\mathrm{e}^{0.5\times 6-3} = 6 - 4\mathrm{e}^{0} = 6 - 4 = 2$.
3. Cela revient à chercher $x \geqslant$ tel que $f'(x) = -2$
$\Leftrightarrow -4 \times 0{,}5\mathrm{e}^{0.5x-3} = -2 \Leftrightarrow -2\mathrm{e}^{0.5x-3} = -2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{0.5x-3} = 1 \Leftrightarrow 0{,}5x - 3 = \ln 1$
$\Leftrightarrow 0{,}5x - 3 = 0 \Leftrightarrow 0{,}5x = 3 \Leftrightarrow x = 6$. Le point d'abscisse 6 convinet.
4. $f''(x) = -2 \times 0{,}5\mathrm{e}^{0.5x-3} = -\mathrm{e}^{0.5x-3} < 0$ car un exponentiel est toujours strictement positif, donc f est bien concave sur $[0\,;+\infty[$.
5. aire (en unités d'aire) = « intégrale de la plus grande - plus petite »
$= \displaystyle\int_0^6 f(x) - 2\,\mathrm{d}x = \int_0^6 4 - 4\mathrm{e}^{0.5x-3}\,\mathrm{d}x = \int_0^6 4 - 8\left(0{,}5\mathrm{e}^{0.5x-3}\right)\,\mathrm{d}x$
$= \left[4x - 8\mathrm{e}^{0.5x-3}\right]_0^6 = \left(24 - 8\mathrm{e}^{0}\right) - \left(0 - 8\mathrm{e}^{-3}\right) = 16 + 8\mathrm{e}^{-3} \approx 16{,}4$

▶ Exercice n°17

1. a) $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} -0.1t = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{-0.1t} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} f(t) = -\infty$.

   b) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -0.1t = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0.1t} = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 20$.

   c) La droite d'équation $y = 20$ est une asymptote horizontale à C_f en $+\infty$.

   d) $f'(t) = 0 - 20\left(-0{,}1\,\mathrm{e}^{-0.1t}\right) = 2\,\mathrm{e}^{-0.1t} > 0$ sur $\mathbb{R}$ car un exponentiel est toujours strictement positif. Donc f est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a) $f(10) = 20 - 20\,\mathrm{e}^{-1} \approx 12{,}6$C.

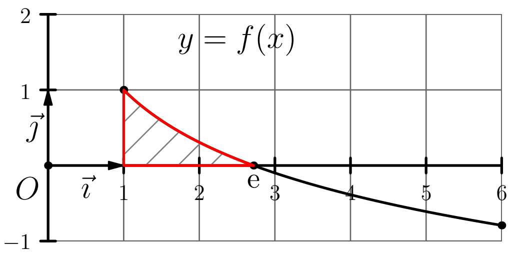
   b) $f(t) = 19 \Leftrightarrow 20 - 20\,\mathrm{e}^{-0.1t} = 19 \Leftrightarrow -20\,\mathrm{e}^{-0.1t} = -1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0.1t} = 0{,}05$
   $\Leftrightarrow -0{,}1t = \ln(0{,}05) \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln(0{,}05)}{-0{,}1} \approx t = 30$ secondes.

   c) température moyenne $= \dfrac{1}{60-0}\displaystyle\int_0^{60} f(t)\ \mathrm{d}t =$
   $\dfrac{1}{60}\left[20t - 20 \times \dfrac{1}{-0{,}1}\,\mathrm{e}^{-0.1t}\right]_0^{60}$
   $= \dfrac{1}{60}\left[20t + 200\,\mathrm{e}^{-0.1t}\right]_0^{60} = \dfrac{1}{60}\left[20 \times 60 + 200\,\mathrm{e}^{-0.1\times 60} - 200\,\mathrm{e}^{0}\right]$
   $= \dfrac{1}{60}\left[1200 + 200\,\mathrm{e}^{-6} - 200\right] = \dfrac{1}{60}\left[1000 + 200\,\mathrm{e}^{-6}\right] \approx 16{,}7$C

▶ Exercice n°18

1. $F'(x) = f(x)$. Donc le signe de $f(x)$ donne les variations de F. Or $f(x)$ est d'abord positif, puis négatif, donc F doit être croissante, puis décroissante. Seule $F2$ correspond.

2. $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F2(x)\right]_1^{\mathrm{e}} = F2(\mathrm{e}) - F2(1) = \mathrm{e} - 1 - 1 = \mathrm{e} - 2$.
   I représente l'aire de la partie hachurée :



► **Exercice n°19**

1. a) $1-\mathrm{e}^{x-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant \mathrm{e}^{x-1} \Leftrightarrow \ln 1 \geqslant x-1 \Leftrightarrow 1 \geqslant x$. $S =]-\infty\,;\,1]$

   b) Sur $[0;1]$, on a $x \geqslant 0$ et $1-\mathrm{e}^{x-1} \geqslant 0$ d'après la question précédente.

   c) $G'(x) = -1\times\mathrm{e}^{x-1} + (1-x)\times\mathrm{e}^{x-1} + x = -\mathrm{e}^{x-1} + \mathrm{e}^{x-1} - x\mathrm{e}^{x-1} + x$
   $= -x\mathrm{e}^{x-1} + x = x\left(1-\mathrm{e}^{x-1}\right) = g(x)$

2. a)
   - $f(0) = 0\times\mathrm{e}^{-1} = 0\,;$
   - $f(1) = 1\times\mathrm{e}^{0} = 1\,;$
   - $f'(x) = 1\times\mathrm{e}^{x-1} + x\times\mathrm{e}^{x-1} = \mathrm{e}^{x-1} + x\mathrm{e}^{x-1} = (1+x)\,\mathrm{e}^{x-1}$.
     $1+x$ et e^{x-1} sont positifs sur $[0;1]$ donc f est bien croissante sur $[0;1]\,;$
   - $x - f(x) = x - x\mathrm{e}^{x-1} = x\left(1-\mathrm{e}^{x-1}\right) = g(x) \geqslant 0$ sur $[0;1]$ d'après la question 1. b). On a donc bien $f(x) \leqslant x$ sur $[0;1]$

   b) aire de la partie hachurée $= \displaystyle\int_0^1 x - f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_0^1 =$
   $G(1) - G(0) = \left(0+\dfrac{1}{2}\right) - \left(\mathrm{e}^{-1}+0\right) = \dfrac{1}{2} - \mathrm{e}^{-1}$.
   coefficient de Gini $= \dfrac{\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}}{\frac{1}{2}} = 2\left(\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}\right) = 1-2\mathrm{e}^{-1}$